Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires . Secretaría de Educación
Subsecretaría de Educación . Dirección General de Planeamiento . Dirección de Currícula

Actualización de Programas
de nivel medio

Programa de **Matemática**

Segundo año
RESOLUCIÓN Nº 1636/SED/2004

PLAN CBU (RM Nº 1813/88 Y 1182/90)
PLAN BC (DECRETO Nº 6680/56)

Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula
Bartolomé Mitre 1249 . CPA c1036aaw . Buenos Aires
Teléfono: 4375 6093 . teléfono/fax: 4373 5875
e-mail: dircur@buenosaires.edu.ar

Actualización de Programas de Nivel Medio. Segundo año

Equipo Técnico

Equipo Central: Marcela Benegas (Coordinadora),
Ana Campelo, Graciela Cappelletti, Marta García Costoya.

Biología: Laura Lacreu, Laura Socolovsky, Mirta Kauderer.
Educación Cívica: Isabelino Siede, Nancy Cardinaux, Vera Waksman.
Educación Física: Eduardo Prieto, Silvia Ferrari.
Geografía: Adriana Villa, Viviana Zenobi.
Historia: Mariana Canedo, María Elena Barral.
Informática: Susana Muraro, Rosa Cicala.
Lengua y Literatura: Delia Lerner, María Elena Rodríguez, Hilda Weitzman.
Matemática: Patricia Sadovsky, Carmen Sessa, Gema Fioriti.
Música: Clarisa Alvarez, Gustavo Vargas.
Plástica: Graciela Sanz.
Teatro: Helena Alderoqui.
Tecnología: Abel Rodríguez de Fraga, Claudia Figari, Jorge Petrosino.
Proyecto Sociedad, Cultura y Arte: Helena Alderoqui y Gabriela Fabbro.
Educación para la Salud: Arturo Sala y Nuria Sala.

Colaboración: Cecilia Ullman (Plástica), Paula Ferrer (Teatro).

La edición de este texto estuvo a cargo de la Dirección de Currícula.

Í N D I C E

Programa de Matemática

INTRODUCCIÓN[1]

Los programas para primero y segundo año en el área fueron elaborados teniendo como propósito fundamental lograr que la actividad matemática de las aulas constituya una práctica que contribuya a la formación intelectual y social de los jóvenes.

Una idea central –presente también en la propuesta curricular para las escuelas primarias de la Ciudad– orienta el enfoque que se propone: un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un

1 | En esta introducción se realizan consideraciones sobre los contenidos para primer año y sobre la continuidad de los mismos en segundo año.

modelo matemático de la realidad (matemática o extra matemática) que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Se trata de una idea general acerca de la disciplina que se irá fortaleciendo en un proceso de trabajo largo y sostenido. Resulta fundamental no perderla de vista a la hora de pensar la enseñanza de cada uno de los conceptos que se van a comunicar. La actividad de modelización matemática supone la toma de múltiples decisiones para enfrentar el problema que se está resolviendo: cuáles son las relaciones relevantes sobre las que se va a operar, cuáles son los símbolos que se van a utilizar para representarlas, cuáles son los elementos en los que apoyarse para aceptar la razonabilidad del modelo que se está usando, cuáles son las propiedades que justifican las operaciones que se realicen, cómo reinterpretar los resultados de esas operaciones en el problema...

El pasaje de la aritmética al álgebra y la entrada en el razonamiento deductivo, suponen transformaciones importantes para los alumnos que comienzan la escuela secundaria y tienen una fuerte presencia en distintos contenidos de estos programas. Se trata de un trabajo que se inicia en primer año y que continúa en los años siguientes.

Los contenidos se han organizado en **tres bloques**: números, álgebra y funciones, y geometría. Se propone un desarrollo en el que se alternen unidades de los distintos bloques.

El **bloque Números** abarca el estudio de los números **naturales, enteros y racionales** tanto en primero como en segundo año. Se trata de consolidar los conocimientos de los alumnos y de proponer nuevos aspectos del funcionamiento de los números.

Desde la escuela primaria los estudiantes vienen tratando con los **números naturales** como herramienta para contar colecciones. Presentar a los alumnos colecciones con distinta complejidad para contar permitirá una evolución de sus conocimientos sobre este tema. En **primer año** se propone un trabajo que involucra **la producción de fórmulas** para contar la cantidad de elementos de la iteración número **n** de un proceso que responde a una cierta regularidad; y en **segundo año** se continúa con este trabajo y se incorporan **problemas de combinatoria**. Mirando los dos años en perspectiva, los alumnos deberían "pasar en limpio" que contar no se reduce a nombrar los números en serie y que las operaciones y las propiedades de los números naturales contribuyen a esa tarea.

Obtener fórmulas para contar los elementos de una colección –como dijimos ese trabajo comienza en primer año– permite poner en evidencia la estructura del algoritmo de cálculo subyacente y, a la vez, esto da sentido a un primer uso de la letra como variable y a un trabajo sobre las escrituras. El álgebra aparece como herramienta para tratar una cierta problemática y, al mismo tiempo, las distintas maneras de abordar un mismo problema dan sentido a la discusión sobre las equivalencias de las diferentes expresiones que lo representan.

Los problemas de combinatoria ofrecen la oportunidad de elaborar técnicas de conteo profundizando los sentidos de las operaciones aritméticas que los alumnos estudiaron en la escuela primaria.

Se propone para primer año un trabajo sobre las operaciones, el orden y la divisibilidad en el conjunto de los **números enteros** y en segundo año se retoman y profundizan cuestiones relativas a la divisibilidad. Este último campo es **especialmente propicio para la exploración, la formulación y la validación de conjeturas** y acá vuelve a aparecer el álgebra como herramienta para producir conocimiento sobre lo numérico. Por ejemplo, si los alumnos deben decidir si la suma de cuatro enteros consecutivos es o no múltiplo de cuatro, podrán comenzar indagando y formulando conjeturas. Para escribir algebraicamente el problema, deberán darse cuenta de que los cuatro números están relacionados $(n,\ n+1,\ n+2,\ n+3)$ y finalmente deberán transformar la suma de las expresiones anteriores y llegar a $4\,n\ +\ 4\ +\ 2$ ó bien $4(n+1)+2$. Para concluir deberán "leer" que la última expresión nunca puede ser múltiplo de 4. Se juega acá un aspecto central del álgebra elemental, que atraviesa todos los contenidos de los dos programas.

El trabajo con **números racionales** comienza en primer año con la resolución de distintos tipos de problemas que requieren de las operaciones aritméticas. Las propiedades de las operaciones y el orden se estudiarán a partir de problemas que permitan analizar su funcionamiento. Se incorpora el estudio de la potenciación y la radicación en Q. Se busca que los alumnos aprendan a distinguir entre el resultado exacto y aproximado de una cierta operación (por ejemplo, al hacer $1:\ 3$, el visor de la calculadora muestra un resultado aproximado) y se propondrán situaciones que apunten a lograr un uso controlado de la calculadora.

Los alumnos deberán consolidar un sentido de "lo numérico" que se caracteriza, entre otros aspectos, por: la capacidad de estimar resultados sin realizarlos efectivamente, de anticipar las operaciones necesarias para la resolución de un problema, de inventar estrategias alternativas para realizar cálculos mentales en función de los números que se utilizan, de conocer las razones por las que al multiplicar un decimal por una potencia de diez "se corre la coma" para un lado o para otro, de comprender por qué los desarrollos decimales de números racionales o son finitos o son periódicos y poder anticipar si una cierta fracción admite desarrollo decimal finito o periódico, de transformar un cálculo en otro equivalente más sencillo, aplicando propiedades de las operaciones. Para consolidar y/o desarrollar estas capacidades, la calculadora será una herramienta esencial que estará presente en todo momento, salvo para algunas actividades puntuales con las que se quiera provocar alguna reflexión que quedaría inhibida por su uso.

Se analizará que la ecuación $x^2=a$ no siempre tiene solución racional, se apelará a contextos geométricos para discutir la existencia de solución y se promoverá la producción de algoritmos de aproximación a la solución (por ejemplo, encuadramientos sucesivos). En segundo año se consolida la noción de densidad acerca de la cual se fueron planteando aproximaciones el año anterior, se propone un trabajo sobre la aproximación decimal de un número racional, se introduce la noción de número irracional.

Como se dijo antes, en las unidades correspondientes a números naturales, enteros y racionales, se ha incluido el álgebra como herramienta para indagar, formular y demostrar propiedades de los números. Al hacer esta opción, se ha querido proponer un juego dialéctico entre lo numérico y lo algebraico, juego a través del cual los alumnos podrán aprender que la herramienta algebraica ofrece la posibilidad de profundizar el conocimiento de lo numérico y que la utilización de esta herramienta se apoya en los conocimientos sobre las propiedades de los números. Este juego exige un aprendizaje transversal que se irá adquiriendo a través de un proceso largo.

Las **funciones** y las **ecuaciones** son los contenidos principales del **bloque Álgebra y funciones** en cada uno de los años, pero el álgebra –como ya se ha señalado– está presente en todos los contenidos como herramienta de modelización. La organización de trabajo que finalmente realice cada profesor deberá contemplar que en el momento en que se aborda una determinada unidad, estén disponibles las herramientas necesarias para hacer funcionar el álgebra con relación a los contenidos de dicha unidad.

En primer año se plantea una primera aproximación a las **funciones** a través del análisis de gráficos. Los alumnos deberán aprender a interpretar tanto la información que surge de una lectura directa de los gráficos como a obtener datos que requieren un análisis más profundo (por ejemplo, interpretar la "inclinación de una recta" en términos de la velocidad de crecimiento del proceso que representa). Se incluye además un trabajo de producción de gráficos para que modelicen situaciones contextualizadas. Siempre que sea posible, se incorporará el recurso informático para la producción de gráficos cartesianos. Se construirán gráficos aproximados a partir de tablas de valores y se explicitarán los supuestos que hacen posible esta construcción. Se presentarán funciones a través de fórmulas y se promoverán situaciones en las que los alumnos puedan anticipar información de un gráfico a partir del análisis de su correspondiente fórmula e información de una relación algebraica a través del análisis de un gráfico que represente dicha relación. Este trabajo se sostiene y profundiza en segundo año. La entrada a funciones por medio de gráficos ofrece la posibilidad de tratar funciones más complejas que aquellas a las que se podría acceder usando fórmulas, teniendo en cuenta los conocimientos de los alumnos a esta altura de la escolaridad.

Las **funciones lineales** se abordan en los dos primeros años. En primer año, se parte de situaciones contextualizadas y se espera llegar a caracterizar los fenómenos lineales en términos de variación uniforme. La producción de fórmulas para describir procesos lineales se obtendrá como consecuencia de dicha caracterización. La proporcionalidad directa se analiza como caso particular de los procesos lineales. En segundo año se retoma y profundiza este estudio, se analiza la ecuación de la recta –esto significa relacionar la forma "recta" con su ecuación–, y se interpreta el sentido que adquieren las cuestiones geométricas en diferentes contextos que se modelizan a través de las funciones lineales.

El estudio de las **ecuaciones lineales con una variable** se aborda, en primer lugar, en el contexto de la búsqueda de preimágenes de funciones lineales. En primer año sólo se exigirá a los estudiantes la resolución de ecuaciones lineales del tipo $a\,x + b = c$.

Ecuaciones más complejas podrán ser tratadas por aproximaciones sucesivas, de forma gráfica o algebraicamente; sin embargo, **los conocimientos involucrados en estas tareas no formarán parte de las condiciones de acreditación para los alumnos**.

Como ya se ha mencionado, la manipulación de expresiones algebraicas están presentes en primer año al servicio del trabajo en el bloque Números.

En segundo año se estudiarán de manera sistemática **ecuaciones lineales más complejas que exigen transformaciones algebraicas**. Estas ecuaciones surgirán en primer lugar, respondiendo a la necesidad de hallar la intersección de dos funciones lineales y luego se propondrán problemas más complejos referidos a diferentes contextos. Esta opción permite que en un primer momento los estudiantes puedan coordinar la información que obtienen gráficamente con la que surge del tratamiento algebraico de la correspondiente ecuación, aprendiendo que un marco (ya sea el gráfico o el algebraico) puede actuar como control del otro.

Se propone para segundo año el tratamiento de **ecuaciones lineales con más de una variable** (dos y tres) y luego el estudio de **sistemas de ecuaciones lineales con dos**

variables. Como producto del trabajo de los dos años, los alumnos deberán estar en condiciones de interpretar que una expresión del tipo de $y = a\,x + b$ puede representar la ecuación de una recta, una ecuación lineal con dos variables o una función lineal. Es decir, deben poder reconocer en una misma escritura los distintos aspectos de lo lineal que fueron estudiando en los dos años.

Mirando globalmente los contenidos de los programas para primero y segundo año se identifican distintas **funciones del álgebra** y se propone una enseñanza que apunte a ponerlas en juego: **el álgebra como instrumento para conocer propiedades sobre los números, para resolver problemas extramatemáticos en los que hay que reconocer una o más condiciones sobre una o más variables, para modelizar procesos a través de funciones y para representar relaciones geométricas.** Esto implica trabajar con diferentes objetos algebraicos, tales como funciones, ecuaciones, expresiones y fórmulas, y poner en juego distintos significados para las letras: variable, incógnita, número generalizado.

Para realizar este trabajo será necesario que los alumnos dispongan de una cierta destreza que se irá adquiriendo al mismo tiempo que se vayan poniendo en juego los diferentes usos del álgebra. **Una opción fundamental de este programa es no separar los aspectos algorítmicos del funcionamiento algebraico, del trabajo de modelización.** En otros términos, los alumnos irán aprendiendo a hacer las "cuentas" del álgebra a medida que éstas sean necesarias para la resolución de problemas en los que se resuelve alguna cuestión. Se considera que esta opción ofrece a los estudiantes mayores posibilidades de controlar los resultados de su producción.

Teniendo en cuenta los trabajos desarrollados en la escuela primaria, se propone para el **bloque Geometría** una profundización del estudio de las figuras, a través de distintas actividades que impliquen la puesta en funcionamiento de propiedades como medio para anticipar, establecer relaciones y elaborar nuevas propiedades.

El criterio general que se plantea es el de usar como "axiomas" las propiedades con las que los alumnos están muy familiarizados y considerarlas como punto de apoyo para deducir otras nuevas. Se trata de que los alumnos tengan la experiencia de deducir propiedades y no se propone en esta instancia la explicitación inicial de un sistema axiomático mínimo. Esto último tendría la ventaja de poner en primer plano un trabajo lógicamente correcto pero, al hacer necesaria la demostración de propiedades obvias para los alumnos, los alejaría de la posibilidad de comprender en profundidad el sentido de la demostración deductiva.

En primer año, se instalan los criterios de congruencia de triángulos a través de un trabajo con construcciones y luego estos criterios sirven de apoyo para deducir nuevas propiedades.

Las clásicas construcciones euclideanas con regla no graduada y compás constituyen un campo especialmente propicio para realizar –vía la figura de análisis– anticipaciones que requieren un encadenamiento deductivo.

La relación pitagórica, estudiada como relación entre áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo y como relación entre la medida de sus lados, permitirá tratar con la existencia de números no racionales.

En segundo año se incorpora el estudio de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices del triángulo. Sobre la base del estudio de sus puntos de intersección se plantea la construcción de circunferencias inscriptas y circunscriptas a un triángulo. Todos estos elementos ampliarán las posibilidades de construcción de triángulos con regla no graduada y compás.

Se profundiza el estudio de la circunferencia incorporando las relaciones entre ángulos inscriptos en arcos de circunferencia y sus correspondientes ángulos centrales. Estas relaciones serán punto de apoyo para la construcción de la recta tangente a una circunferencia por un punto dado.

El teorema de Thales constituye otro polo alrededor del cual se estructuran las nociones de semejanza y las razones trigonométricas.

El trabajo en torno al **razonamiento deductivo** se desarrolla a lo largo de todos los contenidos. Se sostiene el criterio de encontrar situaciones a través de las cuales los alumnos se vean en la necesidad de producir argumentos deductivos, apoyándose en los conocimientos que ya poseen. Será necesario proponer problemas a través de los cuales quede clara la necesidad de ponerse de acuerdo respecto del uso de algunas reglas: varios ejemplos no son suficientes para probar la validez de una propiedad, un contraejemplo sirve para descartar la validez de una propiedad. El contraejemplo a la vez ofrece la posibilidad de analizar si la propiedad acerca de la cual se está discutiendo es válida en algún dominio, contribuyendo así a enriquecer su sentido: más interesante que decir que una propiedad no es verdadera es analizar bajo qué condiciones es válida.

Los progresos en la producción de argumentos deductivos se conciben en el ámbito de las interacciones entre los alumnos y con el docente. Se buscarán condiciones que hagan propicio el debate en la clase acerca de la validez de diferentes proposiciones vinculadas a distintas áreas del conocimiento matemático. Se parte del supuesto de que la necesidad de convencer a otros puede alentar a los alumnos a la producción de pruebas. Finalmente será necesario un trabajo didáctico para lograr que los alumnos comprendan que la demostración es la forma de validar en matemática y de "estar seguro".

Acerca de la organización de este programa

Este programa incluye:

- propósitos para la enseñanza de la matemática;
- contenidos para segundo año, por bloques y por unidades dentro de cada bloque; y comentarios que precisan la intencionalidad que se persigue a través de la enseñanza de los contenidos de cada bloque;
- objetivos de aprendizaje para cada bloque, que serán considerados para la acreditación;
- anexo con problemas referidos a las distintas unidades de cada bloque.

PROPÓSITOS

A través de la enseñanza se procurará:

- Transmitir a los alumnos la convicción de que la matemática es una cuestión de trabajo, estudio y perseverancia y, por lo tanto, accesible a todos.
- Concebir la diversidad como un aspecto inherente a la realidad de las aulas y gestar en consecuencia una enseñanza que abarque a todos los alumnos.
- Proponer situaciones en las que el trabajo cooperativo resulte relevante para la producción que se espera.
- Lograr que las clases sean un ámbito en el que se valore la ayuda entre los compañeros, la aceptación del error, la descentración del propio punto de vista, la capacidad de escuchar al otro, la responsabilidad personal y grupal.
- Promover un tipo de trabajo que lleve a los estudiantes a concebir la modelización como un aspecto fundamental de la actividad matemática.
- Desarrollar en los alumnos la capacidad de modelizar situaciones, ofrecer las expe-

riencias necesarias que permitan conceptualizar las características de los procesos de modelización.

- Instalar una enseñanza que permita a los alumnos transitar la ruptura que supone el pasaje de prácticas aritméticas a prácticas algebraicas favoreciendo, a través de las situaciones propuestas, que puedan:
  - concebir los límites de los conocimientos aritméticos para abordar ciertos problemas;
  - recuperar los antiguos conocimientos aritméticos y usarlos como punto de apoyo.
- Proponer una enseñanza que se plantee como objetivo que los alumnos puedan tratar con lo general brindando la oportunidad de:
  - conjeturar propiedades sobre conjuntos infinitos;
  - explorar la validez de las afirmaciones que se realicen y validarlas a partir de los conocimientos que se posean;
  - determinar el dominio de validez de una afirmación.
- Proponer situaciones que ofrezcan la oportunidad de coordinar diferentes formas de representación, favoreciendo que los alumnos puedan usar unas como medio de producción y de control del trabajo sobre otras.
- Generar condiciones que permitan a los alumnos entrar en prácticas de argumentación basadas en el conocimiento matemático, acercándose a la demostración deductiva, modo de validación de las afirmaciones en la matemática.

ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS

NÚMEROS

UNIDAD 1. NÚMEROS ENTEROS

◗ Divisibilidad de números enteros. Cálculo de restos. Producción, formulación y validación de conjeturas referidas a cuestiones de divisibilidad en el conjunto de los números enteros.

Comentarios

El trabajo en el campo de lo numérico en segundo año se plantea a partir de esta unidad que retoma las ideas tratadas en la unidad 2 del bloque Números correspondiente a primer año. Será necesario repasar las nociones básicas que son punto de apoyo para la validación de conjeturas (división entera, múltiplo, divisor, número primo). Este tema ofrece la posibilidad de abordar problemas complejos con –relativamente– pocos elementos matemáticos. Su inclusión está pensada con el doble propósito de recuperar, revisar y sostener el tratamiento de problemas que exigen poner en juego la herramienta algebraica para producir conocimiento sobre lo numérico y, al mismo tiempo, avanzar en la complejidad de las relaciones que es necesario tener en cuenta para abordar los problemas. Esta última cuestión apunta a enriquecer las estrategias que los alumnos disponen para hacer demostraciones en álgebra. Es claro que las frases "avanzar en la complejidad" y "enriquecer las estrategias" deben llenarse de contenido a partir de la experiencia que hayan tenido los alumnos en primer año y esto, a la vez, exigirá una coordinación estrecha entre los docentes de ambos cursos. (Se ofrecen como orientación los ejemplos 1, 2 y 3 del Anexo.)

Números

Unidad 2. Combinatoria

- **El diagrama de árbol como recurso para contar de manera exhaustiva. Reconocimiento de la estructura multiplicativa en problemas de combinatoria. Problemas en los que no se distingue el orden de los elementos.**
- **Problemas que involucran variaciones simples, variaciones con repetición y permutaciones simples. Problemas que involucran combinaciones simples.**
- **Análisis de las fórmulas que surgen al generalizar problemas de combinatoria.**

Comentarios

Se propone ampliar el significado de "contar" usando los números naturales; se busca que los alumnos encuentren procedimientos que permitan contar exhaustivamente. Es posible tratar muchos problemas de combinatoria a través de estrategias elementales que luego pueden ser retomadas para avanzar hacia técnicas más elaboradas. Estas técnicas, basadas en el reconocimiento de la estructura multiplicativa de los problemas de combinatoria, son un punto de llegada luego de un trabajo de exploración que será alentado desde la enseñanza.

Este tema es especialmente fértil para discutir con los alumnos cuáles son las formas de representación que "mejor muestran" las relaciones necesarias para resolver cada problema. En este sentido tablas de doble entrada y diagramas de árbol serán representaciones privilegiadas. Se espera que los alumnos aprendan a elegir unas u otras en función del problema que deben resolver, como un recurso útil para dicha resolución y no como una forma impuesta.

A partir de las generalizaciones que se vayan realizando sobre los problemas, se deberán ir produciendo fórmulas que permitan contar en cada caso. La idea es que dichas fórmulas (no necesariamente únicas para cada tipo de problema) emerjan en la clase como un resultado de la reflexión **sobre** los problemas realizados y no que sean presentadas previamente, ligadas a una clasificación de problemas que los alumnos no han tenido posibilidad de elaborar. Aunque se espera que los estudiantes lleguen a clasificar los distintos tipos de problemas como un recurso de economía para resolverlos, se deberá evitar que lo hagan buscando claves externas sin alcanzar una verdadera comprensión. (La típica pregunta de un alumno de escuela primaria "¿es de por?", se transformaría para este contenido en el intento empecinado por establecer si "es de variaciones" reflejando, en uno y otro caso, cierta ajenidad con las cuestiones que se están abordando.)

Una vez producidas las fórmulas, su análisis contribuye a aportar cierta información que no es tan visible desde los problemas numéricos. Se promueve entonces un juego de idas y vueltas entre fórmula y problema que profundiza la comprensión tanto de los problemas como de las fórmulas (ver ejemplos 4 y 5 en el Anexo). Esta idea está en continuidad con la que se viene proponiendo desde primer año para el tratamiento algebraico: la información acerca de las operaciones que las fórmulas permiten "guardar" pueden ser reinvertidas en los problemas. **En ningún caso se exigirá que los alumnos memoricen las fórmulas o que recuerden los nombres.**

Más allá de los ejemplos que se presentan en el Anexo, muchos libros de texto ofrecen numerosos problemas de combinatoria que los docentes podrán seleccionar, tratando de tomar en cuenta una variedad de problemas que promuevan la exploración, la comparación entre los diferentes tipos que se tratan y la multiplicidad de formas de representación que admiten.

NÚMEROS

UNIDAD 3. NÚMEROS RACIONALES

3.1

- **Formulación y validación de conjeturas que involucren las propiedades de las operaciones y la relación de orden en $\mathbb{Q}$.**
- **La propiedad de densidad en $\mathbb{Q}$. Aproximación de números racionales por números decimales. La propiedad de densidad de los números decimales.**
- **Redondeo y truncamiento, estimación del error.**

3.2

- **Potenciación y radicación en $\mathbb{Q}$.**
- **Potencias de exponente entero. Notación científica de números decimales. La notación $a^{\frac{p}{q}}$. Radicación y potenciación como funciones inversas. Noción de número irracional. Conjunto de números reales. Ubicación de números de la forma $\sqrt{n}$ en la recta numérica.**

COMENTARIOS

Para comenzar a abordar las cuestiones planteadas en esta unidad, es necesario que los alumnos actualicen las operaciones en $\mathbb{Q}$. A partir del repaso que en cada curso se realice, deberá quedar claro para los alumnos que ellos deben elaborar y poner en juego criterios para controlar el funcionamiento de las operaciones, sin necesidad de apelar a reglas cuya fundamentación desconocen. Como ya se ha señalado a propósito del programa para primer año, los históricos ejercicios de *cálculo combinando diferentes operaciones* con la única finalidad de aplicar reglas **desaparecen de la propuesta**. La presencia masiva de calculadoras en la sociedad actual ha hecho perder sentido a los objetivos exclusivamente centrados en la práctica de mecanismos sin fundamentación. Las cuestiones algorítmicas irán emergiendo en paralelo con la necesidad de contar con técnicas para abordar los problemas.

La aplicación de las propiedades de las operaciones en Q ofrece la posibilidad de disponer de varias escrituras para una misma expresión. Los alumnos deberán elaborar estas equivalencias y comprender qué propiedades permiten la transformación de una expresión en otra equivalente. (Ver ejemplo 6 del Anexo.)

El análisis de fracciones reducibles o irreducibles puede requerir la puesta en juego de cuestiones de divisibilidad tratadas en la Unidad 1. (Ver ejemplo 7 del Anexo.)

Se retoma la problemática de la densidad (ver ejemplo 8 del Anexo) y se incorpora el estudio del funcionamiento de los errores. Los alumnos deberán aprender a encontrar el intervalo en el que se encuentra un número que se ha truncado o redondeado en alguna cifra. Se analizará que al aproximar los números pueden perderse las propiedades de las operaciones. Por ejemplo, si se trabaja con una calculadora que trunca a los diez dígitos, $0,3+1122334455-1122334454$ será distinto de $0,3+(1122334455-1122334454)$. (Ver ejemplo 9 del Anexo.)

En segundo año se vuelve también sobre el estudio de la radicación y la potenciación. Se incluye como asunto nuevo la utilización en la notación científica y de exponentes no naturales.

Se propondrá alguna demostración acerca de la no racionalidad de $\sqrt{2}$ y se interpretará el "fenómeno" a la luz de la noción de segmentos inconmensurables. Se trata de una primera aproximación a un concepto muy difícil que los alumnos profundizarán en años siguientes. Se puede hacer referencia a la relación entre el lado de un cuadrado y su diagonal, actualizando cuestiones estudiadas en primer año, a propósito del teorema de Pitágoras. Otra referencia interesante puede ser la de establecer la medida del lado de un cuadrado, conociendo su área. (Ver ejemplo 10 del Anexo.)

La ubicación de números $\sqrt{n}$ en la recta numérica es un medio para profundizar el estudio del número irracional. (Ver ejemplo 11 del Anexo.)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE NÚMEROS

El trabajo en torno a este bloque deberá generar las condiciones para que los alumnos puedan:

- Poner en juego propiedades de las operaciones aritméticas para:
  - proponer fórmulas que expresen las relaciones que plantea un problema;
  - leer en una fórmula información relevante para el problema que se está tratando;
  - transformar una expresión algebraica en otra equivalente que permita obtener nueva información;
  - reconocer la equivalencia entre diferentes fórmulas.
- Producir, formular y validar conjeturas relativas a los números enteros y racionales utilizando el recurso algebraico.
- Reconocer la necesidad de acordar reglas para decidir acerca de la validez de ciertas afirmaciones. Utilizar dichas reglas: varios ejemplos no validan una afirmación, un contraejemplo invalida una regla, para demostrar una proposición es necesario producir un argumento que englobe todos los elementos del dominio al que se refiere dicha proposición.
- Comprender el funcionamiento de la potenciación y la radicación a través de:
  - la utilización de las propiedades;
  - el estudio de sus gráficas;
  - el uso de diferentes tipos de calculadoras.
- Reconocer la diferencia entre valores exactos y aproximados de un número racional.
- Estimar el error en una aproximación y el intervalo al que pertenece el valor exacto, conociendo el criterio con el que se lo ha aproximado.
- Utilizar formas de representación adecuadas y estrategias exhaustivas de conteo para abordar y validar problemas de combinatoria.

Álgebra y Funciones

Unidad 1: Funciones

Interpretación y producción de gráficos que representan situaciones contextualizadas. Producción e interpretación de fórmulas que modelizan situaciones contextualizadas. Coordinación entre distintas formas de representación (gráfico, fórmula, tabla, descripción verbal). Utilización de gráficos cartesianos para obtener información sobre una expresión algebraica. Análisis de una expresión algebraica para anticipar la forma de un gráfico cartesiano.

Comentarios

El trabajo en esta unidad está en continuidad con la propuesta realizada para primer año: trabajar con gráficos incluyendo el análisis del comportamiento global del proceso que se describe en términos de velocidad de crecimiento, máximos y mínimos, análisis de intervalos, etc. Los alumnos han tenido una primera aproximación a la noción de velocidad de crecimiento para funciones lineales. Se trata ahora de tener una aproximación a esta noción para funciones no lineales, a través del análisis de los gráficos. Se apunta a lograr que los alumnos construyan el concepto de función como dependencia de una variable con respecto a otra, idea que no surge de la definición de función como subconjunto del producto cartesiano. (Ver ejemplo 12 en el Anexo.)

Se pretende que el alumno llegue a comprender que:

- Cada forma de representación pone de relieve aspectos a los que no se accede tan directamente a través de otra forma de representación.
- El gráfico cartesiano es un buen recurso cuando hay que establecer comparaciones entre diferentes funciones o hay que manejar simultáneamente la información correspondiente a varios procesos.
- La fórmula da acceso al valor de la función cualquiera sea el elemento del dominio, la tabla exige interpolar para los valores que no figuran en ella.

- Cuando una fórmula describe un proceso experimental, resulta siempre una idealización de dicho proceso. En este sentido, los alumnos deben aceptar que, aunque la "realidad" no coincide exactamente con la información que se obtiene a través de la fórmula resulta una descripción fértil tanto para tener acceso a la descripción de hechos ya ocurridos como para hacer anticipaciones. Subyace a esta idea la noción de modelo matemático.

Álgebra y Funciones

Unidad 2: Funcion Lineal. Ecuaciones e inecuaciones lineales en una variable

- **Revisión de la noción de función lineal como modelo de "variación constante".**
- **Ecuación lineal en una variable. Ecuaciones equivalentes y conjunto solución.**
- **Problemas que se modelizan con ecuaciones lineales con una variable. Problemas con infinitas soluciones y problemas sin solución.**
- **Resolución de ecuaciones que involucren transformaciones algebraicas.**
- **Inecuaciones de primer grado con una variable. Problemas que se modelizan a través de una inecuación lineal.**
- **Representación en la recta numérica de las soluciones de una inecuación lineal con una variable.**

Comentarios

Se propone retomar en esta unidad los problemas de funciones lineales en diferentes contextos, como modo de "entrar" a las ecuaciones lineales en una variable, buscando aquellos valores de la variable independiente donde la función tome un cierto valor predeterminado. Las ecuaciones lineales pueden surgir también a partir de buscar los puntos de "encuentro" de dos funciones lineales. Es un trabajo que ha comenzado en primer año y ahora se profundiza.

Plantear problemas para los cuales las ecuaciones que los modelizan tengan única solución, infinitas soluciones o no tengan solución y discutir acerca de sus semejanzas y diferencias, debería contribuir a una mejor conceptualización de la ecuación lineal con una variable y del papel que juegan las letras allí. La ecuación no es solamente una "igualdad con incógnita" sino la expresión de una condición sobre un conjunto de números que tiene asociada un conjunto solución. Resolver una ecuación no es "encontrar el número que representa la x", sino poder determinar exactamente cuál es el conjunto solución de la misma. En ese sentido, las ecuaciones sin solución y las ecuaciones con infinitas soluciones deben ser tratadas en igualdad de condiciones y no como casos "raros".

La noción de ecuación equivalente y la discusión acerca de distintas operaciones que dejan invariante el conjunto solución debe estar incluido en el trabajo en torno al tratamiento de las ecuaciones.

A partir del trabajo que se realice, se intentará que los alumnos puedan ver la ecuación como un modelo que deja de lado un contexto particular, para expresar solamente las relaciones entre las cantidades involucradas. El recurso de reemplazar en una ecuación para verificar si cierto número es solución debe quedar habilitado.

En los capítulos correspondientes a números naturales, enteros y racionales, se ha incluido el álgebra como herramienta para indagar, formular y demostrar propiedades de los números: al transformar una expresión algebraica en otra equivalente se ha podido leer en ella nuevas relaciones que no eran visibles antes de la transformación.

En el caso de las ecuaciones, podrán aparecer transformaciones de expresiones algebraicas al servicio de la resolución de las mismas para, por ejemplo, transformar una ecuación en otra equivalente más simple de resolver. De esta manera, la "operatoria algebraica" continúa apareciendo ligada a la resolución de algún tipo de problemática específica.

Las consideraciones anteriores apuntan a plantear líneas de trabajo que contribuyan a que los alumnos fundamenten las transformaciones que realizan sobre las ecuaciones. Queda pendiente, sin embargo, la cuestión de validar si una cierta ecuación es o no una buena representación del problema que se intenta resolver. Acá los criterios para saber si la ecuación está o no bien planteada son mucho más difusos y el docente deberá gestionar espacios de discusión colectiva que apunten a la elaboración de dichos criterios. (Ver ejemplo 13 del Anexo.)

Se propone el tratamiento de inecuaciones con una variable pero no se pretende avanzar en problemas de mucha complejidad técnica. Es posible apelar a las representaciones gráficas para proponer una forma de resolución. Por ejemplo, para resolver $3x - 2 > x + 5$ los alumnos podrían proponer resolver $3x - 2 = x + 5$ (gráficamente buscar la intersección de las rectas $y = 3x - 2$ e $y = x + 5$) y luego comparar la imagen de ambas funciones para un valor de x mayor o menor que $x = \frac{7}{2}$ que es la solución de la ecuación planteada. Este método se basa en el hecho de que se trata de comparar dos funciones lineales que se cortan en un único punto y que a la derecha del punto de intersección una de las funciones estará siempre por encima o por debajo de la otra y a la izquierda de dicho punto sucederá lo contrario. Será interesante discutir qué sucede cuándo las funciones involucradas no se cortan y el caso en el que las soluciones sean todos los números reales. En segundo año de la escolaridad, el trabajo con inecuaciones basado en este método "funcional" será suficiente, lo que no implica dejar de avanzar en el desarrollo de otros métodos de resolución, cuando fuera posible.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

UNIDAD 3: ECUACIÓN DE LA RECTA. ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES

- **Ecuación de la recta. Pendiente. Rectas paralelas. Producción de la representación gráfica y de la ecuación de una recta a partir de ciertos datos: dos puntos cualesquiera, un punto y la pendiente, los puntos en los que corta a los ejes.**
- **Problemas que involucren ecuaciones lineales con dos variables. Ecuaciones equivalentes y conjunto solución de una ecuación lineal con dos variables.**
- **Producción de soluciones numéricas y representación gráfica de las soluciones.**
- **Problemas que involucren una ecuación con tres (o más variables): modelización algebraica para decidir si una terna es o no solución del problema o para obtener características de las soluciones.**
- **Inecuaciones con dos variables. Problemas que puedan modelizarse con una inecuación lineal con dos variables. Representación gráfica de la solución.**

COMENTARIOS

La ecuación de la recta se consideró en primer año, asociada directamente al gráfico de funciones lineales, en contextos que evocan situaciones "de uso social". Para segundo año se propone el estudio de la propiedad fundamental de las funciones lineales ($\frac{\triangle y}{\triangle x} = constante$) como característica de la forma "recta" y en este caso se trabaja directamente en el contexto de los gráficos cartesianos. El concepto de pendiente requiere un trabajo en tres niveles: ¿cómo y dónde aparece en la fórmula de las funciones? ¿Qué relación tiene con el aspecto del dibujo de la recta (es una medida de la inclinación de la misma)? ¿Cuál es el sentido que adquiere en cada uno de los contextos de los problemas modelizados con funciones lineales? (Ver el ejemplo14 en el Anexo.)

En el programa se incluye la discusión y el análisis acerca de cómo determinar la ecuación de una recta que pase por dos puntos, o que pase por un punto y tenga una cierta pendiente. Estos problemas están planteados porque su discusión enriquece la conceptualización de la recta, no para proveer una lista de fórmulas o algoritmos que el alumno debe recordar para aplicar luego en la resolución de problemas tipo.

En segundo año se propone también el trabajo numérico con ecuaciones con varias variables. Se comienza en esta Unidad con el tratamiento del conjunto solución de una ecuación lineal con dos o más variables, conformado por infinitos pares de números y se continúa en la Unidad 4 con los sistemas de ecuaciones lineales. Se apunta nuevamente a un sentido de las letras en las ecuaciones más amplio que aquel de "incógnita" o número desconocido "a develar" (fijado de antemano), que es el sentido que usualmente se privilegia en las propuestas de enseñanza vigentes.

El trabajo a partir de problemas en contexto permite enfrentar problemas que se modelizan con una ecuación con dos variables pero que incorporan restricciones de manera que resulten un conjunto finito de pares como solución. El tratamiento de conjuntos infinitos implica una complejidad con la cual los alumnos deben enfrentarse, tanto para describir las soluciones de una ecuación como para probar alguna propiedad que debieran cumplir todos los elementos de ese conjunto. La noción de ecuaciones equivalentes –aquellas que comparten el mismo conjunto solución– deberá ser tratada estudiando cuáles son las transformaciones algebraicas que preservan este conjunto.

El estudio de las soluciones de una ecuación con dos variables remite al concepto de función lineal que sin duda sirve de apoyo para su tratamiento. Es interesante destacar aquí que debe ser el alumno, a partir de los requerimientos propios de la tarea que estuviera realizando, el que debe decidir el carácter de dependiente o independiente de cada una de las variables involucradas.

La representación gráfica del conjunto de pares que conforman la solución de una ecuación lineal con dos variables, permitirá considerarla como "ecuación de una recta", poniendo en escena la relación entre cada punto de la recta y cada par de números, solución de la ecuación.

Para el tratamiento de una ecuación lineal con dos variables se presentan varios problemas en el ejemplo 15 del Anexo.

En definitiva, se espera que los alumnos adquieran una cierta flexibilidad para pasar, en relación con una misma situación, de la consideración de una función a una ecuación, a sus soluciones numéricas y su representación gráfica.

En este programa se incluye la consideración de inecuaciones con dos o más variables pero no se pretende avanzar en problemas de mucha complejidad técnica. (Ver problema 16 en el Anexo.)

Álgebra y Funciones

Unidad 4. Sistemas de ecuaciones

◗ Problemas que involucren sistemas de ecuaciones con dos variables. La noción de sistemas equivalentes. Resolución de los sistemas. Representación gráfica de un sistema y de sistemas equivalentes. Rectas paralelas y sistemas con infinitas soluciones.

Comentarios

El tratamiento de los sistemas de ecuaciones se apoya en el concepto construido de ecuación lineal con varias variables: el conjunto solución de un sistema deberá ser concebido como la intersección de los conjuntos solución de cada una de las ecuaciones involucradas.

Transformar las ecuaciones sin modificar el conjunto solución del sistema debe ser el objetivo que comande la marcha en la resolución de los mismos, independiente del "método" que se esté utilizando. O sea, se pone en juego aquí la noción de sistemas equivalentes, que es visiblemente más compleja que para una sola ecuación.

La representación gráfica de las soluciones de cada ecuación del sistema puede servir tanto para dar aproximadamente la solución del sistema como para chequear la obtenida numéricamente o para hacer un análisis global que permita "ubicar la zona" donde está la solución, aunque ésta quede fuera del papel.

Detenerse a graficar, para algún sistema, los diferentes sistemas equivalentes que se fueron obteniendo en la resolución, puede aportar a la comprensión tanto del procedimiento de resolución como a la noción de sistemas equivalentes. Cuando se trata de sistemas con solución única, todas las rectas involucradas cumplen una condición: pasar por el punto solución del sistema. Por otro lado, el resultado final obtenido $x = a$; $y = b$ puede leerse ahora como la intersección de una recta vertical y una horizontal.

Para los sistemas con infinitas o ninguna solución, la representación gráfica servirá como marco para interpretar lo que se obtiene en el tratamiento numérico. La noción de pendiente aparece aquí resignificada. (Ver en el Anexo el problema 17.)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

El trabajo en torno de este bloque deberá generar las condiciones para que los alumnos puedan:

- Resolver ecuaciones con una y con varias variables que comprenda:
  - la noción de ecuación como restricción que se impone sobre un cierto dominio y que tiene asociada un conjunto solución;
  - la noción de ecuaciones equivalentes y las operaciones que dejan invariante el conjunto solución;
  - el recurso de reemplazar en una ecuación para verificar si cierto número, par o terna, es solución de la ecuación;
  - la resolución de problemas que se modelizan a través de ecuaciones;
  - la coordinación entre resolución gráfica y algebraica.
- Modelizar problemas a través de inecuaciones y resolverlos gráficamente.
- Realizar un tratamiento de los sistemas de ecuaciones que implique:
  - Comprender la noción de sistemas equivalentes;
  - Resolver problemas que se modelizan a través de sistemas de ecuaciones, coordi-

nando las informaciones que resulten del tratamiento algebraico, de la representación cartesiana y del contexto en el que se plantea el problema que el sistema modeliza.

Geometría

Unidad 1: Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Ángulos inscriptos

◗ Rectas tangentes, secantes y exteriores. Caracterización de la recta tangente. Construcción de la recta tangente a una circunferencia por un punto dado.

◗ Ángulos inscriptos en una semicircunferencia. Ángulos inscriptos en un arco de circunferencia y relación con el ángulo central correspondiente.

Comentarios

En la primera unidad se introduce el concepto de recta tangente. Se considera que es un concepto central en matemática y se propone su tratamiento en relación con la circunferencia, pues en este caso se puede dar una definición precisa sin apelar al cálculo infinitesimal: una recta es tangente a una circunferencia si se corta con ella en un único punto. (Ver ejemplo 18 del Anexo.) Con el estudio de las parábolas y la función cuadrática, en años siguientes, esta primera definición de recta tangente deberá ser revisada para establecer sus límites y dar lugar a otra que recupere la idea de "punto doble de contacto".

La relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente es propicia para la exploración y la formulación de conjeturas. El estudio de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia puede ser el punto de partida: este caso se relaciona estrechamente con el problema de los rectángulos que comparten una diagonal. (Ver problema 19 en el Anexo.) La validación de la conjetura para el caso general de un arco de circunferencia se puede apoyar en un caso particular: aquel en que un lado del ángulo inscripto pase por el centro de la circunferencia.

Geometría

Unidad 2: Alturas y medianas de un triángulo. Bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento

- **Construcciones de triángulos a partir de datos que incluyan alturas y/o medianas.**
- **Bisectriz de un ángulo: distancia de sus puntos a los lados del ángulo. Punto de intersección de las bisectrices de un triángulo. Circunferencia inscripta en un triángulo.**
- **La mediatriz de un segmento. Circunferencia determinada por tres puntos. Triángulo inscripto en una circunferencia.**
- **Exploración de las propiedades de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo. El caso del triángulo isósceles.**

Comentarios

En la segunda unidad de Geometría se retoma la problemática de las construcciones de triángulos –trabajada en primer año– incorporando como datos las alturas y las medianas. Nuevamente se trata de considerar la construcción como una tarea que se planifica teniendo en cuenta las propiedades de las figuras. El estudio de la posibilidad y/o unicidad de la construcción es un tipo de tarea que los alumnos han comenzado a desarrollar en primer año y que debe ser ahora recuperada y profundizada. En la Unidad 1 se ha presentado un problema en el Anexo (ver ejemplo 20) que introduce la altura como dato en una construcción. Al trabajar con alturas y medianas, la relación pitagórica será un conocimiento necesario para este estudio. (Ver ejemplo 21 del Anexo.)

Para el tratamiento de las bisectrices de un triángulo es necesario comenzar con la noción de distancia de un punto P a una recta l, considerada ésta como la mínima distancia posible entre P y algún punto de l. Los alumnos ya se encontraron con esta cuestión a raíz de la construcción de la recta tangente a la circunferencia por un punto de la misma y ahora la retoman. Para identificar cuál será la mínima distancia y en qué punto de l se alcanzará es necesario apoyarse –una vez más– en la relación pitagórica. A partir de este estudio puede proponerse una exploración acerca de las propiedades de la bisectriz. (Ver ejemplo 22 en el Anexo.) La construcción de la bisectriz con regla y compás es una tarea a recuperar y que está planteada en el programa de primer año como tarea que puede ser planificada y fundamentada apoyándose en los criterios de igualdad de triángulos. El trabajo con bisectrices en segundo año debe incluir la recuperación de esa construcción y de su fundamentación.

El concepto de mediatriz fue objeto de trabajo en primer año y se recupera ahora para incorporarlo como elemento en el estudio de las relaciones entre triángulos y circunferencias. El problema de identificar en el plano los puntos que equidistan de otros dos fijos puede ser explorado en un hoja de papel por cada alumno y servirá de base tanto para la definición de mediatriz como para la formulación y la validación de su propiedad básica: la mediatriz de un segmento es la perpendicular a éste por su punto medio. Nuevamente, la validación de esta conjetura se apoya en los criterios de igualdad de triángulos, estudiados en primer año. Un problema que puede servir de punto de partida para toda esta actividad en torno a la mediatriz se presenta en el ejemplo 23 del Anexo. El estudio de la mediatriz de un segmento debe llevar a considerar el problema de la determinación y la construcción de una circunferencia circunscripta en un triángulo (ver el ejemplo 24 del Anexo) o de manera similar, el problema de la determinación del centro de una circunferencia, conociendo un arco de ella.

Finalmente, para coronar el trabajo en esta Unidad 2 será necesario la exploración conjunta de las propiedades de las alturas, las medianas y las mediatrices, incluyendo el caso especial del triángulo isósceles. (Ver ejemplo 25 en el Anexo.)

Geometría

Unidad 3: Teorema de Thales. Semejanza

Enunciado y demostración del teorema de Thales. División de un segmento en partes iguales como recurso para representar números racionales en la recta numérica. Problemas que se resuelven a partir de las relaciones implicadas en el teorema de Thales.

La noción de triángulos semejantes. Relación de semejanza entre un triángulo dado y el que se obtiene al trazar una paralela a uno de los lados. Base media de un triángulo. Criterios de semejanza de triángulos. Intersección de las medianas de un triángulo. Polígonos semejantes. Ampliación y reducción de polígonos. Relación entre las áreas de polígonos semejantes.

Razones trigonométricas.

Comentarios

El teorema de Thales, conocimiento central de la tercera unidad, será presentado por el docente. Se propone un posible esquema para su tratamiento en el ejemplo 26 del Anexo, en el cual se presenta una demostración accesible para segundo año basada en la noción de área (ver también el ejemplo 27 que presenta actividades para trabajar la equivalencia de áreas).

El caso particular de las bases medias de un triángulo permite la formulación de un conocimiento que puede constituirse en punto de apoyo para la elaboración de nuevas propiedades. (Ver ejemplo 28 en el Anexo.) También permite construir un procedimiento para el trazado de la paralela a una recta por un punto exterior a ella.

El problema de la partición de un segmento en n partes iguales puede ser planteado a los alumnos, para que resignifiquen el teorema de Thales, evitando presentar estas cuestiones como algoritmos ya dados. Estos conocimientos son a su vez una herramienta para la ubicación de números racionales en la recta numérica.

Para el estudio de la semejanza de figuras es posible plantear problemas que hagan necesaria la consideración de una figura semejante para obtener información sobre una figura dada, poniendo en relación los lados y las áreas. (Ver ejemplos 29, 30 , 31 y 32 en el Anexo.)

La aplicación del teorema de Thales al estudio de las relaciones entre las medidas de los segmentos que se determinan cuando un triángulo rectángulo es cortado por una recta paralela a los lados, permite el abordaje de las razones trigonométricas. Es parte del tratamiento que se espera para segundo año la exploración del hecho de que, si bien las medidas que constituyen las razones trigonométricas se definen a partir de los elementos de un triángulo rectángulo, las razones que se obtienen dependen únicamente de los valores del ángulo. Recuperando el Teorema de Pitágoras estudiado en primer año se podrá incluir en este estudio la propiedad de que para todo ángulo a, $sen^2\ a + cos^2\ a = 1$.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE GEOMETRÍA

El trabajo en torno a este bloque deberá generar las condiciones para que los alumnos puedan:

- Resolver problemas que requieran la utilización de la noción de recta tangente a una circunferencia.
- Realizar construcciones con regla y compás que tengan en cuenta los criterios de congruencia de triángulos y que incorporen las propiedades relativas a mediatrices, medianas, bisectrices y alturas.
- Resolver problemas que supongan encadenamientos deductivos y pongan en juego las propiedades de los triángulos, de la circunferencia, de la recta tangente y de los ángulos inscriptos.
- Producir conocimientos sobre las figuras utilizando relaciones que surgen del teorema de Thales y de los criterios de semejanza de triángulos y polígonos.
- Realizar construcciones con regla y compás, que requieran la utilización del teorema de Thales y los criterios de semejanza de polígonos.

ANEXO

Números

Números enteros[2]

EJEMPLO 1

¿Cuáles son los números que al ser divididos por 5 dan un resto igual al cociente?
¿Cuáles son los números que al ser divididos por 6 dan un resto que es el doble del cociente?
¿Cuáles son los números que al ser divididos por 4 dan un cociente que es el triple del resto?

Se trata de poner en juego la definición de división entera, lo cual exige coordinar dos condiciones: dividendo = divisor x cociente + resto y $0 \leqslant$ resto < divisor. A la vez, es necesario considerar en cada caso la condición que plantea el problema. Como la "variable" toma una cantidad finita de valores, los alumnos pueden "recorrerla" explorando caso por caso. Los estudiantes enfrentan entonces la tarea de tener en cuenta varias condiciones, a propósito de un problema sencillo. Este problema opera como repaso de cuestiones abordadas el año anterior y, en ese sentido, "es tanto un problema de primero como de segundo año".

EJEMPLO 2

a) Al dividir un número n por 23, se obtiene resto 15. Llamemos m al número que resulta de sumarle a n un múltiplo de 23. ¿Es posible conocer el resto de dividir m por 23?

b) Dos números enteros a y b se restan. Al dividir por 23 esta diferencia ($a - b$), se obtiene resto 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, cualesquiera sean a y b?

- a y b son múltiplos de 23.
- a y b pueden tener igual o distinto resto al ser divididos por 23.

2 | En el libro *Aritmética* de María Elena Becker, Norma Pietrocola y Carlos Sánchez, publicado por la Red Olímpica, se ofrece una muy amplia y rica gama de problemas que el docente puede adaptar para sus clases.

- a y b tienen el mismo resto al ser divididos por 23.
- Ni a ni b son múltiplos de 23.

c) *Dos números enteros m y n tienen ambos resto 12 al ser divididos por 23. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, cualesquiera sean m y n?*
- La diferencia $m - n$ tiene resto 12 al ser dividida por 23.
- No se puede conocer el resto de dividir por 23 la diferencia $m - n$.
- El número $m - n$ es un múltiplo de 23.
- El resto de dividir por 23 la diferencia $m - n$ es 0.

Se trata de poner a los alumnos en situación de explorar una relación que luego podrá generalizarse: si dos números difieren en un múltiplo de n, tienen el mismo resto al ser divididos por n y, recíprocamente, si dos números tienen el mismo resto al ser divididos por n, su diferencia es un múltiplo de n. La elección del número 23 es arbitraria y puede reemplazarse por otro número.

Los alumnos pueden abordar las distintas cuestiones que se plantean a través de ejemplos numéricos. Al proponer los ejemplos los alumnos deben centrarse en respetar las condiciones del problema y esto contribuye a que los distintos ensayos, realizados con la intención de juntar evidencias para responder las preguntas, "muestren" relaciones que se validarán a través de la herramienta algebraica.

EJEMPLO 3

Estudiar la siguiente afirmación y eventualmente "ajustarla".
"Cualquier número al cuadrado, tiene resto 1 al dividirlo por 8."

Este problema puede empezar a estudiarse a través de ejemplos. Los ensayos deberían "mostrar" que al elevar al cuadrado un número impar, se obtiene resto 1 al dividirlo por 8. El ajuste de la conjetura pasa justamente por precisar que es válida para los números impares ya que en ese caso:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

y como el producto $k(k+1)$ es par ya que se trata de dos números consecutivos, el producto $4k\,(k + 1)$ es múltiplo de 8 y toda la expresión es un múltiplo de 8 más 1, o sea que tiene resto 1 al ser dividida por 8.

Es probable que muchos alumnos, gracias a la experiencia acumulada con este tipo de problemas en primero y segundo año, se propongan buscar un modo de expresar el cuadrado de un número impar como un múltiplo de 8, más 1. Escribir de manera general un número impar y elevar al cuadrado dicha expresión son dos estrategias que colaboran con el propósito mencionado. A la vez, haber anticipado que se espera "un múltiplo de 8 más 1" debería contribuir a que "lean" que $k\,(k + 1)$ es un número par que al ser multiplicado por 4 da como resultado un múltiplo de 8.

NÚMEROS

NÚMEROS NATURALES. COMBINATORIA

EJEMPLO 4

a) ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Y de 5 cifras diferentes? ¿Y de 3 cifras diferentes?
b) ¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Y de 5 cifras? ¿Y de 3 cifras?
c) Comparar los problemas a) y b).

Estas preguntas admiten una fase exploratoria que debería dar pistas para que los alumnos encuentren alguna forma de organizar la información de modo tal de garantizar la exhaustividad del conteo, sin necesidad de escribir todos los números. En este punto, el diagrama de árbol es una representación adaptada a estos problemas y permite identificar la estructura multiplicativa de ellos. Es interesante comparar los árboles que surgen de los problemas a) y b).

d) En una competencia en la que participan 4 personas (A, B, C, D), ¿de cuántas maneras diferentes pueden ocuparse los tres primeros lugares? ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocuparse los tres primeros lugares si se sabe que A nunca sale primero? ¿Y si las personas *que participan fueran 8, de cuántas maneras podrían ocuparse los tres primeros lugares? ¿Qué cambia y qué queda igual cuando se cambia el dato de 4 personas por el dato de 8 personas?*

e) *Cinco postulantes se presentan en una empresa para ocupar los cargos en las secciones personal, contaduría y gerencia. Todos los postulantes están habilitados para los tres cargos. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerse la selección?*

f) *Se desea armar un equipo de trabajo integrado por tres personas. Si hay 5 postulantes, ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerse la selección?*

g) *Establecer semejanzas y diferencias entre los problemas d), e) y f).*

h) *Proponer un problema que tenga la misma estructura que el problema d), uno que tenga la misma estructura que el e) y otro que sea como el f).*

i) *Considerar el problema d) y plantear una fórmula que describa el cálculo si juegan m personas y se desea conocer de cuántas maneras pueden ocuparse los n primeros lugares.*

Los problemas "se parecen" pero son diferentes. El análisis de semejanzas y diferencias permite identificar ciertas cuestiones relevantes para los problemas de combinatoria:

- se pueden repetir o no los elementos de la colección,
- interesa o no el orden de los elementos de la colección.

Asimismo, es importante que se analicen los procedimientos erróneos, tratando de identificar cuál es el aspecto en el que "fallan" (cuentan de más, no cuentan todo, etcétera).

EJEMPLO 5

La cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados.

¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero (convexo)? ¿Y un pentágono (convexo)? ¿Y un hexágono? ¿Y un polígono de n lados?

Los alumnos pueden encarar una exploración para polígonos de 4, 5, 6, 7, 8 lados, que alimenten relaciones más generales que les permitan obtener una fórmula para el caso general de n lados. El problema podría pensarse, por ejemplo, de estas dos maneras:

- Cada vértice "hace diagonal" con todos los que no son sus vecinos. Esto significa que cada vértice forma diagonal con n-3 vértices. Como hay n vértices tendríamos la fórmula $n(n-3)$. Pero como dos puntos determinan una única diagonal, la fórmula es $\frac{1}{2}\,n(n-3)$.

- Cada vértice se asocia con todos los otros, lo cual da $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ y a este número hay que restarle la cantidad de lados, con lo cual se obtiene la fórmula $\frac{1}{2}\,n(n-1) - n$.

Un aspecto interesante a considerar es la validación de las dos fórmulas en el contexto del problema para luego establecer su equivalencia algebraica. Este trabajo retoma el tipo de producción propuesto en primer año. Efectivamente en el programa de primer año se plantea un trabajo en el cual se obtienen fórmulas acerca de las cuales se conoce su equivalencia por el contexto del problema en el que surgen y para las que se propone reconstruir dicha equivalencia utilizando las propiedades de los números. (Ver Anexo de problemas del Programa de Matemática de primer año, páginas 50 a 55.)

Si se les propone a los alumnos hacer una tabla que relacione la cantidad de lados del polígono con la cantidad de diagonales, se obtiene:

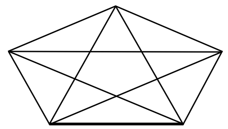
Cantidad de lados del polígono	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Cantidad de diagonales	**2**	**5**	**9**	**14**	**20**	**27**

Se puede señalar que si se suma a la cantidad de diagonales de un cierto polígono de n lados, el número $n-1$, se obtiene la cantidad de diagonales del polígono de $n+1$ lados. Esta constatación empírica puede dar sentido a preguntar:

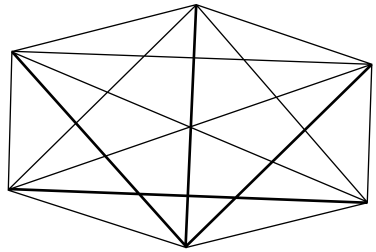
¿Cómo puede calcularse la cantidad de diagonales de un polígono a partir de la cantidad de diagonales del polígono "anterior" (el que tiene un lado menos)?

Evidentemente al agregar un lado, se agrega un vértice.

Todas las diagonales del polígono de n lados lo serán de este de $n+1$ lados y se agregan ahora las que tienen por un extremo al nuevo vértice y por otro extremo a cualquiera de los $n-2$ vértices con los que puede "formar diagonal". Pero, además, al "interponer" un vértice entre otros dos, un "viejo" lado se transforma en diagonal, con lo cual en total se agregan $n-1$ diagonales.



El lado marcado pasa a ser diagonal al agregar un vértice.



A

Se agregan las tres diagonales que pasan por A y el viejo lado.

El análisis sobre la figura explica entonces la regularidad numérica que se "observa" en la tabla.

Las conclusiones anteriores permiten aún un tratamiento en el marco algebraico: si a la fórmula $\frac{1}{2}\, n\,(n-3)$ se le suma $n-1$, se obtiene la cantidad de diagonales del polígono de $n+1$ lados. Ahora bien, si se aplica directamente la fórmula al polígono de $n+1$ lados, se obtiene $\frac{1}{2}\,(n+1)\,(n+1-3) = \frac{1}{2}\,(n+1)\,(n-2)$. Sabemos que este cálculo **tiene que ser equivalente a** $\frac{1}{2}\; n(n-3) + n-1$. Los alumnos tendrán que encontrar que esta equivalencia, hallada por un razonamiento sobre el cálculo de diagonales, puede obtenerse también algebraicamente.

Es el momento de "explotar" la fórmula obtenida para resolver nuevos problemas:

¿Cuántos lados tiene un polígono que tiene 54 diagonales?¿Y uno que tiene 41 diagonales?

Para el primer caso, la fórmula informa que $n(n-3) = 108$. O sea que hay que descomponer 108 en un producto de dos números que difieren entre sí en tres. Las descomposiciones de 108 en dos factores son 2 x 54; 3 x 36; 4 x 27; 6 x 18; 9 x 12. Esta última es la que responde al "requerimiento" $n\,(n-3)$. Por lo tanto se puede concluir que es el polígono de 12 lados el que tiene 54 diagonales.

El mismo trabajo debe llevar a la conclusión de que no hay un polígono que tenga 41 diagonales. ¿Por qué? En este caso, $n(n-3)$ debe ser 82. Al ser 41 un número primo, la única descomposición en dos factores que existe (además de la trivial) es 2 x 41, lo cual no responde al formato $n\ (n-3)$.

Es claro que los cálculos anteriores se podrían haber resuelto a través de una ecuación de segundo grado. Pero los alumnos no disponen aún de este recurso. El trabajo que se propone supone una reinversión de cuestiones de divisibilidad que se han visto en primer año y que se profundizaron en la unidad anterior.

Se puede preguntar todavía lo siguiente: si la fórmula $\frac{1}{2}n\ (n-3)$ cuenta las diagonales de un polígono de n lados, deberíamos estar seguros de que el cálculo que resulta de aplicar la fórmula a cualquier número natural n, es siempre un número natural. ¿Cómo podríamos asegurar esto analizando la fórmula? Se espera que los alumnos establezcan que el producto $n(n-3)$ es siempre un número par y, por lo tanto, al dividirse por 2, da como resultado un número natural.

Finalmente, se pueden plantear problemas análogos para los cuales el problema desarrollado sirva de punto de apoyo:

- Un problema bastante conocido es el de los apretones de manos: Si n personas asisten a una reunión y todas se dan la mano, ¿cuántos apretones de mano hubo? Si hubo 45 apretones de mano, ¿cuántas personas asistieron?

- ¿Cuántos cuadriláteros convexos se pueden formar con los vértices de un hexágono regular?

La discusión con los alumnos acerca de las diferentes analogías que se pueden establecer entre el problema de las diagonales y estos dos problemas, profundizará la comprensión de los tres, al tiempo que pone en juego una práctica típica del quehacer matemático como es la de usar un problema como modelo de otros.

EJEMPLO 6

Diferentes escrituras de expresiones algebraicas

a) ¿Son verdaderas las siguientes igualdades, para todo valor de a racional?

- $\frac{a}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{2} \times \frac{a}{3}$

- $\dfrac{a \times 5}{3} = \dfrac{a}{3} \times 5 = a \times \dfrac{5}{3} = a \times \dfrac{1}{3} \times 5 = \dfrac{a}{3 \times 5} = a \times \dfrac{5}{3}$
- $\dfrac{a \times 9}{7} = \dfrac{a}{7} \times \dfrac{9}{7}$
- $\dfrac{a + 5}{8} = \dfrac{a}{8} + 5 = \dfrac{a}{8} + \dfrac{5}{8}$
- $-a : \dfrac{3}{2} = a \times \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = (a \times 2) : 3$
- $-a \times \dfrac{3}{4} = a \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\left(a \times \dfrac{3}{4}\right)$
- $-(2 - a) = a - 2$
- $-\left(\dfrac{4a + 7}{7}\right) = -\dfrac{4}{7}a - 7$

b) ¿Cuáles de las siguientes expresiones indican el 25% de un número a?

$\dfrac{a}{4}$; $a \times 0{,}25$; $25 \times \dfrac{a}{100}$; $\dfrac{1}{4}a$; $2{,}5\,a$

$\dfrac{5}{20\,a}$; $5 \times \dfrac{a}{20}$; $a + 0{,}25$; $a + \dfrac{25}{100}$; $a + 25\%$

En estos casos interesa utilizar las operaciones y sus propiedades para analizar diferentes escrituras de una misma expresión algebraica.

Los alumnos suelen tener problemas para aceptar y disponer de las diferentes escrituras de una expresión algebraica. Lo que se propone es un trabajo explícito sobre ellas que permita discutir y poner en común las reglas sintácticas.

EJEMPLO 7

a) Calcular para qué valores de n, cada una de las siguientes expresiones representa una fracción irreducible (n es un número natural).

$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{12} \qquad \dfrac{5}{5n + 2} \qquad \dfrac{n}{n+1}$

b) Sabiendo que la fracción $\frac{h}{k}$ es irreducible, estudiar si son también irreducibles las siguientes fracciones:

$$\frac{h+k}{k} \qquad \frac{h+k}{hk} \qquad \frac{h}{k} + m\,\frac{h}{k} \quad (m \text{ natural})$$

Para resolver estas tareas varios conocimientos deben confluir y ponerse en juego:
- las propiedades relativas a operaciones con números racionales;
- el concepto de fracción irreducible;
- cuestiones de divisibilidad;
- convenciones referidas a las escrituras.

EJEMPLO 8

Problemas acerca de la densidad de $\mathbb{Q}$.

1. *¿Cuantos números de denominador 35 hay entre 57 y 58 (sin contar los bordes)?*
2. *¿ Cuántos números con dos cifras decimales hay mayores que 3,45 y menores que 4? ¿Y si se permiten cualquier cantidad de cifras decimales?*
3. *¿ Cuántos números decimales de tres cifras hay ente $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$? ¿ Y si se permiten cualquier cantidad de cifras decimales?*
4. *¿Cuántos números racionales de denominador 9 hay entre $\frac{6}{7}$ y $\frac{24}{7}$? ¿Y si se permite cualquier denominador?*
5. *Encontrar cuatro números racionales entre $\frac{8}{91}$ y $\frac{9}{91}$. Dar una estrategia para inventar 30 más. ¿Cuántos se pueden inventar con la estrategia desplegada?, ¿son todos los posibles?*
6. *Considerar el conjunto de los números racionales mayores que 2 y menores que 5. ¿Cuál es el menor número natural de este conjunto? ¿Cuál es el menor número racional de este conjunto? ¿Cuál es el menor número decimal de este conjunto?*
7. *a) Escribir, si es posible, el número racional siguiente a $\frac{7}{46}$;*
   b) escribir, si es posible, el número decimal siguiente a $\frac{7}{46}$;
   c) escribir, si es posible, el número fraccionario de denominador 46 siguiente a $\frac{7}{46}$;
   d) escribir , si es posible, el número con dos cifras decimales siguiente a $\frac{7}{46}$.

Se trata nuevamente de comparar los conjuntos numéricos, teniendo en cuenta características tales como:

- en el conjunto de los números naturales, todo subconjunto tiene primer elemento (en el conjunto de números racionales no se cumple esta propiedad);
- un número natural tiene siempre un siguiente y un número racional no;
- los números naturales no son densos y los racionales si;
- los números decimales (los que tienen una escritura decimal finita) también son densos;
- los números del visor de la calculadora, las fracciones con denominador fijo o los decimales de una cantidad determinada de cifras, no forman conjuntos densos;
- se puede aproximar un número racional por uno decimal tan próximo como se quiera.

EJEMPLO 9

Cálculo aproximado. Redondeo. Truncamiento. Estimación del error. Aproximación de números racionales por números decimales.

1. *a) Escribir tres números de seis cifras decimales que al ser redondeados a cuatro cifras den 0,5467. Representar en la recta todos los números que pueden cumplir con esta condición.*

   b) Escribir tres números de seis cifras decimales que al ser truncados a cuatro cifras den 0,5467. Representar en la recta todos los números que pueden cumplir esta condición.

   Comparar ambos problemas y los errores que se pueden haber cometido en cada caso.

2. *A partir de las aproximaciones de* $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{11}$ *y* $\frac{80}{11}$ *que se obtienen con una calculadora, explicar cómo aproxima la calculadora.*

Según los distintos tipos de calculadoras que haya en la clase, las cuentas pueden dar distintos resultados y será entonces posible un análisis sobre los distintos métodos de aproximación que ellas utilizan. La discusión sobre los criterios utilizados para establecer el intervalo al que pertenece un número cuya aproximación se conoce daría lugar a una reflexión acerca de las "distancias" entre el conjunto de los racionales y el de los decimales de la calculadora. Será necesario establecer criterios para comprender el funcionamiento de diferentes calculadoras.

EJEMPLO 10

¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado cuya área es de 23 centímetros cuadrados?

A raíz de este problema se pueden "atar diferentes cabos". Por un lado, los alumnos no encontrarán números decimales cuyo cuadrado sea 23, aunque sí podrán hallar aproximaciones. Es importante discutir con ellos si los números que van proponiendo son o no aproximaciones. Por otro lado, se podrá representar la función que hace corresponder a la medida del lado de un cuadrado, el área de ese cuadrado $[f(x) = x^2]$ y preguntar cuál es el valor de x para el cual x^2 es 23. Este asunto tiene una respuesta gráfica (cortar la parábola con una recta horizontal que pasa por $y = 23$) pero la respuesta numérica es para los alumnos "imprecisa". Se puede analizar que raíz cuadrada de 23 no es un número racional, pero sí es un número y, aunque tiene infinitas cifras decimales no periódicas, "tiene su lugar en la recta". Como se ha señalado en los comentarios a la enunciación de contenidos de esta unidad, la propuesta de este programa es iniciar el estudio de una cuestión cuya elaboración requerirá al estudiante muchos años.

EJEMPLO 11

Radicación

a) *Comparar, sin usar la calculadora :*

$\sqrt{\frac{9}{4}}$ y $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[3]{-1893748}$ y $0,001$

b) *Sin utilizar la calculadora realizar las siguientes cuentas*

$\sqrt[3]{2984^{-3}}$; $\sqrt{\frac{1}{4^{26}}}$; $\sqrt[5]{(4^{-10})}$; $\sqrt{\frac{1}{5625}} \times \sqrt{5625}.$

c) *Con ayuda de la calculadora, dar el número decimal de cuatro cifras más cercano a los siguientes números:* $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{68}$. *Ubicar aproximadamente los números hallados en la recta. Considerando la relación pitagórica, ubicar exactamente* $\sqrt{2}$ *y* $\sqrt{5}$.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

EJEMPLO 12

Gráficos cartesianos

a) *Proponer gráficos que representen distintas situaciones contextualizadas: la producción de una fábrica a lo largo de los meses de un año, la variación de una cierta población, etc. Se trata de situaciones no lineales. Se plantean preguntas que apunten a establecer velocidad media de crecimiento para un intervalo, períodos de crecimiento y decrecimiento, períodos de crecimiento mayor, etc. Por ejemplo, proponer un gráfico no lineal que represente la producción diaria de bicicletas de una fábrica durante un año. ¿Cuál fue el trimestre en el que hubo mayor incremento de producción? De los períodos en los que la producción creció, ¿cuál fue el período en el que el crecimiento medio fue menor?*

b) *Los alumnos deben proponer gráficas aproximadas de situaciones descriptas verbalmente en las que se hace énfasis respecto de cuestiones de velocidad de crecimiento.*

c) *Proponer el gráfico aproximado de una función que represente el porcentaje de desempleo durante un año, sabiendo que durante los dos primeros trimestres el desempleo creció, que dicho crecimiento no fue uniforme en ningún momento, que el crecimiento del desempleo fue más brusco en el primer trimestre que en el segundo, que en el tercer trimestre, el porcentaje de desempleo decreció muy suavemente sin llegar a neutralizar los efectos del trimestre anterior y en el cuarto trimestre el crecimiento fue más suave que en los trimestres anteriores en los que el desempleo creció.*

d) *Se propondrán situaciones en los que los alumnos deban, a partir de la información de un gráfico cartesiano, anticipar valores que no pertenecen al intervalo representado. Por ejemplo, se presenta un gráfico que muestra la variación de la temperatura de un líquido* *durante dos horas, a partir del momento en que se lo retira del fuego y comienza a enfriarse. A continuación se pregunta: ¿cuál será la temperatura del líquido dos horas y diez minutos después que se lo retiró del fuego? ¿Y 10 horas después?*

EJEMPLO 13

Ecuación lineal en una variable

A continuación se propone una situación que favorezca la discusión colectiva acerca de la pertinencia de una ecuación (o de varias) como modelo de resolución de un problema.

La clase se divide en una cantidad par de grupos. (En cada grupo hay 3 ó 4 alumnos.) En una primera etapa, la mitad de los grupos de la clase (grupos A) tratan de poner en ecuación un cierto problema (llamémoslo P1), mientras que la otra mitad (grupos B) hace lo mismo con otro problema (que llamaremos P2).

Los alumnos no deben dar la respuesta al problema, sino solamente escribir una o varias ecuaciones que permitan resolverlo. Cada grupo hace una única propuesta.

En una segunda etapa, los grupos A y B intercambian sus enunciados y sus propuestas de ecuaciones. Cada grupo A (respectivamente B) debe pronunciarse sobre la validez de la ecuación propuesta por un grupo B (respectivamente A).

Luego se organiza un momento colectivo de trabajo que se consagra al examen de las diferentes proposiciones de puesta en ecuación. Para cada problema se discute la elección de las incógnitas y la validez de la puesta en ecuación. En este momento, los alumnos deberán explicar cómo controlan la pertinencia de las ecuaciones que propusieron.

El profesor suministra las soluciones para cada una de las propuestas y los alumnos las chequean con la ayuda del enunciado. La idea es justamente que se discuta sobre la puesta en ecuación y no sobre su resolución.

Si algunos alumnos hubieran planteado varias ecuaciones (esta suele ser una tendencia de los alumnos cuando en el problema aparecen variables ligadas) se analizará el significado de las variables y la interpretación de las soluciones. A propósito de estas propuestas, se discutirá con los alumnos si es posible "resumir" el problema en una sola ecuación con una sola incógnita.

Es importante que los problemas que se elijan admitan diferentes puestas posibles en ecuación y que la elección de las variables requiera un análisis de la situación. Esto ocurre si el problema se refiere a varias variables ligadas entre sí. Por ejemplo, si el problema fuera:

"Una escuela compra 25 ejemplares de un libro. Otra escuela consigue comprar el mismo libro a 10 pesos menos por unidad, lo cual le permite comprar 5 libros más por la misma cantidad total de dinero, ¿cuánto gastó cada escuela?"

Para poder encontrar el valor que se pide es necesario tener en cuenta variables auxiliares (el precio unitario de los libros en las dos escuelas). Un problema como éste puede dar lugar, por ejemplo, a tres puestas posibles correctas :

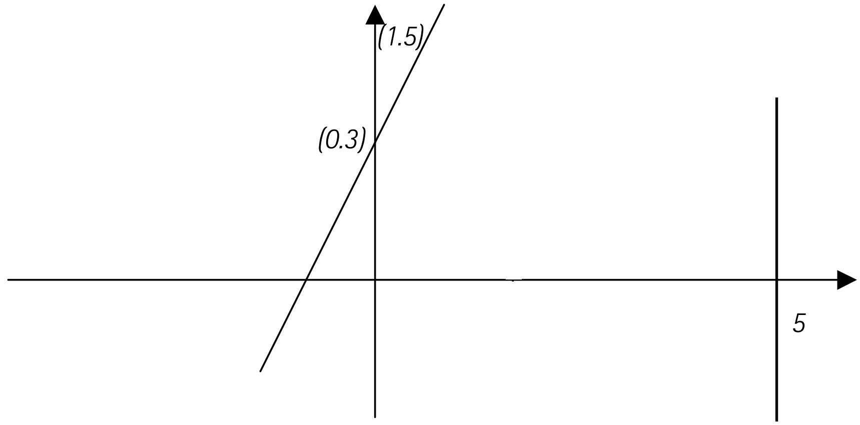
- $y = 25\,x_1 \quad ; \quad y = 30\,x_2 \quad ; \quad x_1 = x_2 + 10$
- $25\,x = 30\,(x - 10)$
- $25\,(x + 10) = 30\,x$

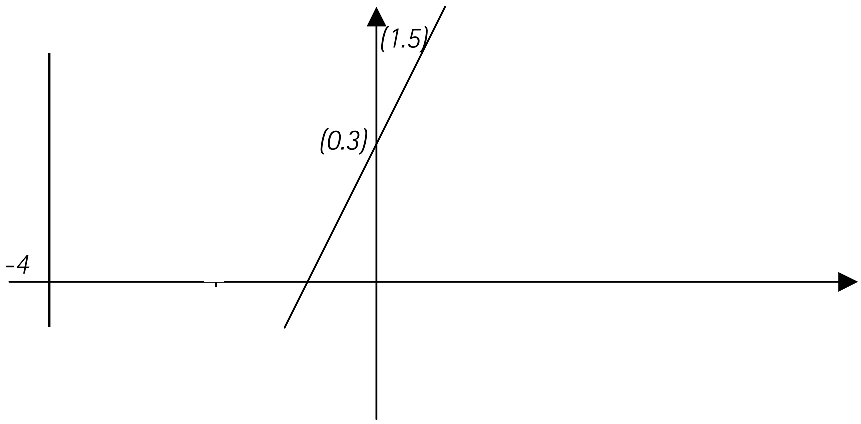
La discusión acerca del significado de las variables, la aceptación de las tres maneras de modelizar el problema, la consideración de que para averiguar el gasto es necesario definir una variable que no está explícita en la pregunta del problema, deberían ir generando en la clase criterios colectivos para orientar el trabajo de modelización de los alumnos.

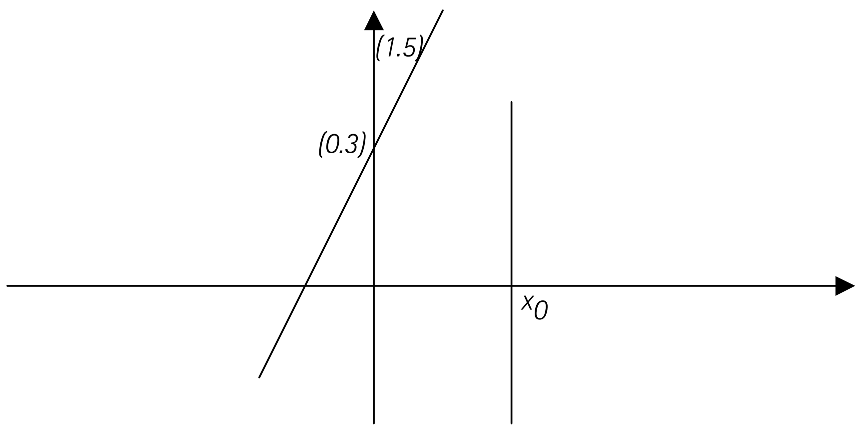
EJEMPLO 14

Ecuación de la recta

Para cada uno de los tres dibujos siguientes, dar las coordenadas del punto en el que se encuentran las dos rectas que aparecen.


(1.5)
(0.3)
5


(1.5)
(0.3)
-4


(1.5)
(0.3)
x0

Este problema lleva a producir la ecuación de la recta dada como generalización del tipo de cálculo que se realiza en los dos primeros dibujos. La estrategia que se pone en juego es calcular el desplazamiento en y cuando se conoce el desplazamiento en x, **bajo la idea de que a incrementos iguales en la variable x, corresponden incrementos iguales en la variable y.**

En la ecuación producida es posible identificar el número que corresponde a la pendiente como el desplazamiento en y cuando x se desplaza 1 a la derecha. Los datos que se dan permiten identificar fácilmente ese desplazamiento.

El hecho de que la intersección de las rectas no sea "accesible" es una condición que genera la necesidad de producir relaciones que anticipen dicho punto. Esta idea permite poner en primer plano el sentido de la ecuación como relación entre las componentes de cada punto de la recta. Al retomar lo lineal desde un marco geométrico se revisan las ideas trabajadas en primer año y resaltan aspectos que no resultan tan evidentes en las situaciones "extra matemáticas" que describen procesos y que los alumnos trataron el año anterior.

EJEMPLO 15

Una ecuación con dos variables

a) Dar dos ecuaciones lineales con dos variables y una lista de pares de números. Se pide establecer una correspondencia entre ecuaciones y pares que son solución de las ecuaciones.

Con este trabajo se apunta a construir de entrada la noción de conjunto solución de una ecuación con dos variables. En la puesta en común habría que discutir el significado del hecho de que varios pares sean solución de una misma ecuación y que un mismo par sea solución de más de una ecuación.

b) Plantear un problema y distintas ecuaciones que lo puedan modelizar, pidiendo la identificación de cuáles sirven. Incluir por lo menos dos escrituras diferentes de una misma ecuación correcta.

La noción de ecuaciones equivalentes asociada a tener el mismo conjunto solución puede ser trabajada aquí con el apoyo del contexto de un problema. El trabajo debe incluir una discusión sobre cuáles son las transformaciones que permiten obtener una ecuación equivalente a una dada.

c) *Pedir la descripción de todas las soluciones de una cierta ecuación, en un problema donde se busquen soluciones positivas y naturales, para acotar los dominios de partida de las variables. La ecuación debe tener muchas soluciones de esa clase para que la descripción punto por punto sea costosa o tediosa.*

En este tipo de problemas la búsqueda de un algoritmo para generar soluciones incluye la toma de decisiones acerca de qué variable considerar como "independiente". Las funciones lineales serán un soporte para esta tarea. Será importante diferenciar el conjunto solución del problema del conjunto solución de la ecuación. Los alumnos deben aceptar que una ecuación es suficiente para establecer una fórmula que permita obtener los pares solución. Suele ocurrir que los alumnos tengan tendencia a considerar que, por el hecho de haber dos variables, son necesarias dos ecuaciones.

d) *Graficar las soluciones de una ecuación lineal con dos variables dadas.*

El tratamiento de los gráficos cartesianos de las soluciones de una ecuación lineal con dos variables debe apoyarse en el tratamiento realizado para la ecuación de la recta y la función lineal. Es recomendable acompañar un tratamiento con lápiz y papel con otro que utilice recursos informáticos.

e) *a)Hallar una recta que pase por dos puntos dados. ¿Es única?*
b)Hallar una recta conociendo su pendiente y un punto por el que pasa. ¿Hay una única posible?

Estos problemas deben plantearse como una fuente de reflexión y de elaboración. No se propone que se algoritmice la resolución y que se incluyan problemas cuya solución dependa de la memorización de una fórmula particular.

Las repuestas a la existencia y la unicidad que se obtengan analíticamente deben poder plantearse en términos "sintéticos", es decir, sin coordenadas. Por ejemplo, para el caso **a**) "por dos puntos pasa una única recta".

EJEMPLO 16

Inecuaciones con dos variables

Para publicar libros en una editorial, se utilizan hojas para los textos que cuestan $5 la resma, y otras para las láminas cuyo costo es de $0.04 por unidad. Se quiere que el costo de papel de cualquier libro que se publique no sea mayor a $4.

a) ¿ Se podrán publicar libros de 300 hojas de texto y 18 de láminas? ¿Y libros con 100 y 100?

b) Proponer 4 ejemplos de libros que puedan ser publicados y dos que no.

c) Si llamamos x a la cantidad de hojas de texto e y a las de láminas, graficar en el plano cartesiano el conjunto de los pares (x, y) que correspondan a "libros publicables".

En este problema se pone en juego una relación con dos variables ligadas por una desigualdad. En la primera pregunta, se propone un chequeo sobre pares para decidir si son o no solución, luego se pide producir algunas soluciones y finalmente el gráfico del conjunto solución. La escritura de la inecuación correspondiente puede servir para chequear las respuestas o para controlar la representación en el plano cartesiano de las soluciones. La relación con la ecuación correspondiente se pone en juego también en la producción del gráfico. Al concluir con la respuesta a las distintas preguntas del problema puede preguntarse por las soluciones de la inecuación, libres ahora de la restricción de valores naturales.

EJEMPLO 17

Sistemas de ecuaciones

a) En dos clubes del barrio se organizaron dos bailes distintos para la misma noche.
En el club "La estrella de Maldonado" las entradas costaban $15 para los hombres y $12 para las mujeres, y se recaudó un total de $885 en concepto de entradas. En el club "Villa Malcom" el precio fue de $10 para todo el mundo y se recaudaron $650.
a) ¿Puede ser que esa noche haya ido la misma cantidad de hombres y de mujeres a ambos bailes?
b) "La estrella de Maldonado" decidió rebajar sus entradas y para la próxima semana cobró $12.50 para los hombres y $10 para las mujeres. Esa vez recaudó $600. ¿Podría ser que hubiera ido la misma cantidad de hombres y de mujeres las dos semanas al "Estrella"?

c) ¿Podría ser que la cantidad de hombres y mujeres en el segundo baile de "La estrella de Maldonado" hubiera sido la misma que en el baile del "Villa Malcom"?

Un problema de este tipo, más allá del método que se despliegue para encontrar las soluciones comunes, permite la discusión de diferentes aspectos: Las tres situaciones que se plantean, dos bailes en "La estrella de Maldonado" y uno en "Villa Malcom", se modelizan cada uno por una ecuación lineal a dos variables. Las que corresponden a los dos bailes en "La estrella de Maldonado" determinan rectas paralelas. La ecuación que modeliza la situación del baile en el "Villa Malcom" corresponde a una recta que corta a una de las anteriores en un punto de dos coordenadas naturales y a la otra fuera del primer cuadrante.

Los tratamientos de tipo más cualitativo que algunos estudiantes podrían desplegar, deberán ser considerados positivamente y discutidos en relación con otros más algorítmicos. Los gráficos de las soluciones de las ecuaciones involucradas podrían ser una buena herramienta de resolución, éstos podrían realizarse vía algún programa de gráfico de funciones. También deberá incluirse alguna manera de "maniobrar" algebraicamente con dos ecuaciones para obtener una solución común.

La diferencia entre las soluciones del sistema y la solución del problema vuelve a estar comprometida (así como fue trabajada a propósito de una sola ecuación).

GEOMETRÍA

EJEMPLO 18

Una posible trayectoria para el trazado de rectas tangentes a una circunferencia.

Por un punto de la circunferencia:

Una vez dada la definición de tangente a una circunferencia (aquella que la corta en un único punto), se apunta a que los alumnos puedan discutir la validez de la siguiente afirmación:

A: "Si una recta pasa por un punto P de una circunferencia y es perpendicular al radio que *pasa por P, entonces esta recta es tangente a la circunferencia."*

Para ello se propone comenzar planteando el siguiente problema:

"Se tiene una circunferencia de centro O. Marcar si es posible dos puntos A y B sobre la circunferencia de manera que el ángulo BAO *sea recto".*

Los alumnos pueden intentar dibujar una ángulo así. Ante la imposibilidad práctica de esta construcción, habrá que pedir una justificación de porqué esto no es posible.

Por ejemplo, la justificación puede apoyarse en el hecho de que el triángulo BOA será isósceles, con ángulo B = ángulo A y, por lo tanto, éstos no pueden ser rectos.

La discusión de la afirmación A sobre la tangente puede hacerse ahora apoyada en este conocimiento. El trazado de una recta tangente a una circunferencia por un punto de ella, se infiere entonces de la perpendicularidad entre la tangente y el radio correspondiente.

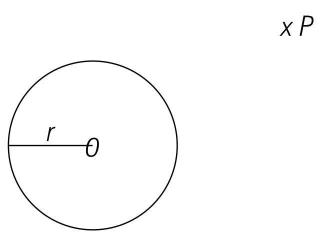
Otra manera de justificar la veracidad de la afirmación A pasa por analizar que para cualquier punto Q de la recta, que no sea P, se obtiene un triángulo rectángulo QPO, del cual $\overline{QO}$ es su hipotenusa. Por la relación pitagórica, la longitud de ese segmento será mayor que la medida del radio y por lo tanto el punto Q necesariamente será exterior a la circunferencia.

Sería importante lograr que los dos tipos de argumentos fueran discutidos, distinguiéndolos de otros que pueden apoyarse en la percepción o en algún dibujo efectivo.

Por un punto exterior a la circunferencia:

Una vez resuelto el problema de trazado anterior, se propone:

"Se da una circunferencia de centro O y radio r y un punto P exterior a ella. Hay que trazar una recta tangente a la circunferencia (no se sabe por qué punto de ella), de manera que la recta pase por P. ¿Siempre se puede hacer? ¿Puede haber más de una recta que lo cumpla?"



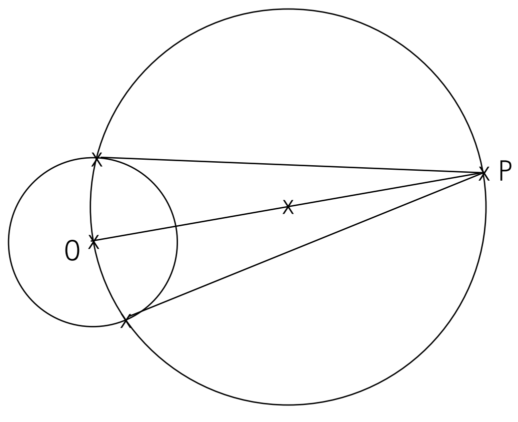
Para resolver esta construcción quizás convenga sugerir la confección de una figura de análisis, un esquema que permita ubicar los elementos. En ese esquema se propone a los alumnos llamar A al punto de contacto de la recta tangente con la circunferencia.

¿ Qué se sabe del triángulo PAO*?*

De este triángulo se conoce: que es rectángulo en A –por lo visto en la parte anterior–, la medida de un cateto –que es la longitud del radio OA– y la medida de la hipotenusa –que es la distancia $\overline{OP}$–. Las construcciones geométricas realizadas en primer año son herramientas para construir ahora el triángulo PAO a partir de los datos. Quizás convenga realizar esa construcción fuera de la circunferencia y de allí tomar la medida del segmento $\overline{AP}$. Con esa medida pueden marcarse con el compás, centrado en P, los puntos de corte con la circunferencia. Esta construcción permite validar que por P pasan siempre dos rectas tangentes a la circunferencia.

La figura de análisis es una herramienta muy útil en el trabajo en geometría, que la misma sea adquirida por los alumnos es algo que debe gestarse a partir de problemas donde aparezca su necesidad o al menos su eficacia. Este problema podría ser uno de ellos.

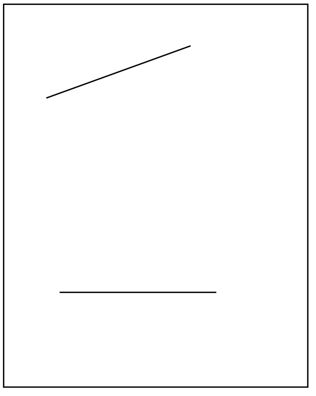
La propiedad de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia, que será comentada en el ejemplo 19, permite elaborar otro algoritmo de construcción para la tangente por un punto exterior; sería interesante volver sobre este problema después del trabajo con esa propiedad. En efecto, si consideramos la situación anterior, donde conocemos O y P, el punto A donde la recta cortará a la circunferencia es una solución al problema de encontrar puntos Q tales que el ángulo OQP sea recto. Como ahora se sabe que todos los ángulos inscriptos en una semicircunferencia son rectos, se puede buscar de esta manera si habrá alguno que tenga su vértice en la circunferencia dada: la semicircunferencia que hay que considerar es aquella que tiene como diámetro el segmento $\overline{OP}$. En definitiva, el punto A buscado debe estar en la intersección de ambas circunferencias. De esta construcción se deduce nuevamente que hay dos rectas tangentes a C por un punto P exterior a ella.



EJEMPLO 19

Ángulos inscriptos en una semicircunferencia

a) *Se dan en una hoja dibujados dos segmentos y se pide, en cada caso, dibujar un rectángulo que tenga el segmento dado por diagonal, si hay más de uno posible dibujar tres distintos y decidir cuántos hay y cómo se podrían dibujar todos.*

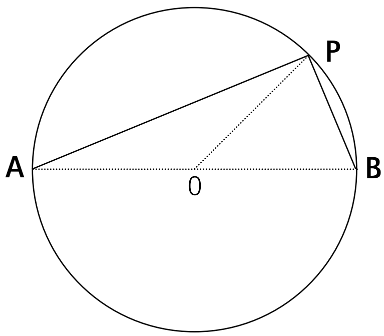


Esta primera actividad es exploratoria; es posible que para algunos alumnos el primer segmento se visualice como la diagonal de un único rectángulo, aquel de lados horizontal y vertical respectivamente. Esta idea resulta insuficiente para construir rectángulos con el segundo segmento. Se espera que los alumnos aprovechen los lados de la escuadra para el trazado de ángulos rectos que pasen por los extremos del segmento dado. Sería importante que durante el trabajo se actualice la propiedad que verifican las diagonales de un rectángulo: son iguales y se cortan en su punto medio. Gracias a esta propiedad es posible construir nuevos rectángulos dibujando la segunda diagonal con distintas inclinaciones.

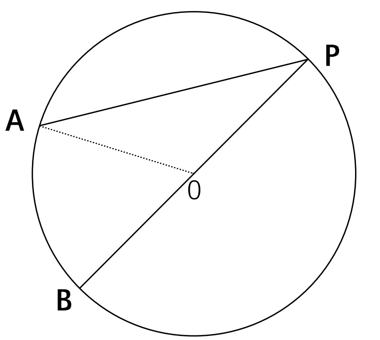
De este trabajo exploratorio se espera arribar colectivamente a la siguiente conjetura –que surge de una "visión" de los rectángulos dibujados–: los vértices de todos los rectángulos dibujados determinan una circunferencia. El docente puede escribirla y pedir entonces una justificación para la siguiente afirmación:

b) *Sean A y B los dos extremos de un diámetro de una circunferencia C. Si se considera cualquier otro punto* P *en la circunferencia el ángulo* APB *es recto.*

Pedir la justificación de esta conjetura es colocar a los alumnos en otro plano diferente al del dibujo y la visualización. Es un proceso que ha comenzado en primer año y que ahora se profundiza, haciéndolo parte de las actividades usuales en el aula. Una pregunta que puede hacer el docente para orientar la búsqueda de la justificación se refiere a la información que aporta el hecho de saber que el punto P pertenece a la circunferencia . Esta pregunta puede hacer aparecer en escena el centro O de la circunferencia. Ahora pueden ser considerados tres triángulos: AOP y BOP, ambos isósceles, y el primitivo triángulo APB. Hay que estudiar los ángulos de los tres triángulos: la propiedad de la suma de los ángulos interiores será el recurso que permita arribar a validar la conjetura.



c) *Supongamos ahora que en una circunferencia se marcó un punto P y se dibujó un ángulo con vértice en P, de manera que uno de los lados del ángulo corte a la circunferencia en un punto A y el otro lado pase por el centro O de la circunferencia y la corte en un punto B.*



¿Si se sabe que el ángulo AOB *mide 78º 36'* , *se puede calcular cuánto mide el ángulo* $\widehat{APB}$ *?*

En este caso se trata de un cálculo que no puede efectuarse midiendo en el dibujo; por la precisión de minutos en los datos es imposible de reproducir.

El dibujo del radio $\overline{AO}$ y del segmento $\overline{AB}$, permite resolver el problema estudiando nuevamente los triángulos que quedan determinados. Es posible que los alumnos lleguen al resultado 39º 18' paso a paso, sin percatarse necesariamente que es la mitad del dato. O puede ser también que lo constaten al final, pero sin llegar a ver que siempre será la mitad. Será necesario entonces una formulación más general, que puede surgir de enfrentar la siguiente tarea:

d) Encontrar, si es posible, un punto P en la situación descripta en el inciso c) de manera que el ángulo APB sea mayor que la mitad del ángulo AOB.

Esta búsqueda resultará infructuosa pero se espera que de su exploración surja la justificación de la propiedad que sí se verifica: "el ángulo central es siempre el doble del ángulo inscripto".

Esta justificación puede apoyarse en los hechos siguientes:

i) dos veces $\widehat{BAO}$, sumado a $\widehat{AOB}$, es igual a dos rectos .

ii) $\widehat{APB} = \widehat{OAP} = 90^{\circ} - \widehat{BAO}$ (por la propiedad de los ángulos inscriptos en una semi-circunferencia). Es decir $\widehat{BAO}$, sumado a $\widehat{APB}$, es igual a un recto.

Estas dos observaciones nos permiten concluir que $\widehat{APB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$.

El tratamiento puede ser más "algebraico":

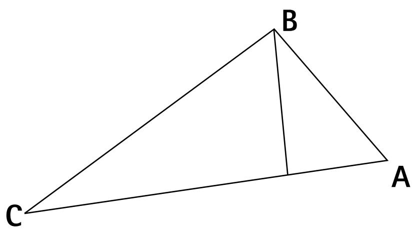
$\widehat{AOB} + 2.\ \widehat{BAO} = 180^{\circ}$ y en consecuencia $\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\ (180^{\circ} - \widehat{AOB})$. De esta relación y ii) se obtiene $\widehat{APB} = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\ (180^{\circ} - \widehat{AOB}) = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$.

Falta todavía el planteo más general de un ángulo inscripto cualquiera. Nuevamente se puede preguntar, pero sin pedir ahora que uno de los lados del ángulo pase por el centro. Se espera que hasta aquí los alumnos hayan producido justificaciones apoyándose en sus conocimientos geométricos. La validación de la propiedad en el caso general podría quedar a cargo del docente.

EJEMPLO 20

Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y la altura correspondiente a la hipotenusa.

Figura de análisis

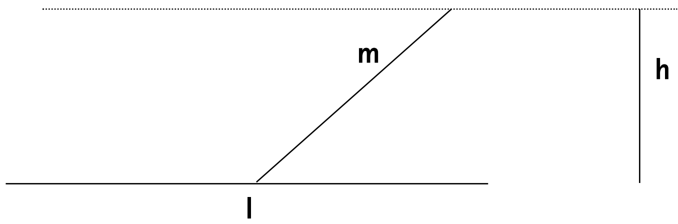


Para trazar el triángulo los alumnos deben ubicar correctamente el punto B, de manera que $A\hat{B}C$ sea un ángulo recto y que la distancia de B al lado $\overline{AC}$ sea igual a la altura dada. El punto buscado resulta ser entonces la intersección entre la recta paralela a la hipotenusa que está a una distancia de la misma igual a la altura y la circunferencia con centro en el punto medio de la hipotenusa y radio igual a la mitad de ella. El problema es una aplicación de la propiedad recién estudiada según la cual si un ángulo está inscripto en una semicircunferencia, es recto. Si los alumnos intentaran dibujar el triángulo "al tanteo", la exploración que realicen debería servir de base para que reconstruyan la figura aplicando la propiedad estudiada. Será necesario estudiar las condiciones para que el problema tenga solución y discutir la cantidad de soluciones posibles. Esta discusión requiere una planificación del trazado y no el trazado efectivo. Es esta planificación, que se apoya en las propiedades de las figuras que ya se conocen, el producto que se espera finalmente de los alumnos.

EJEMPLO 21

Construcciones de triángulos a partir de datos que incluyan alturas y/o medianas.

Construir un triángulo, dados un lado, la altura y la mediana correspondientes a ese lado.
Discutir para qué valores de los datos es posible la construcción.
Discutir si el triángulo obtenido es único.



De este esquema se deduce que la mediana m debe cortar la línea punteada, dibujada a una altura h de lado l y, por lo tanto, debe ser mayor o igual que la altura h. Por otro lado, los dos puntos de corte de la circunferencia con centro en la mitad del lado dado y radio m con la línea punteada, determinan dos triángulos que son simétricos respecto de la perpendicular a l que pasa por su punto medio. Si m fuera igual a h, la intersección de la circunferencia y la recta es única. En ese caso se obtiene un triángulo isósceles.

Durante la exploración de esta situación puede surgir una duda sobre la relación entre las medidas de los tres datos del problema: ¿ Es verdad que $(\frac{l}{2})^2 + (m)^2 = (h)^2$?, porque si así fuera solamente para datos muy particulares el problema tendría solución. La confusión en este caso proviene del hecho de identificar el "pie" de la altura con el extremo del lado l, cosa que ocurre solamente cuando el triángulo es rectángulo.

Estudiar la relación entre las ternas de datos y el tipo de triángulo obtenido puede ser parte de la profundización de la tarea.

Por otro lado, este problema puede ser propicio para una recuperación y profundización de la noción de área de un triángulo. Dos de los datos, el lado l y la altura h correspondiente a ese lado, determinan totalmente el área del triángulo que va a construirse, pero esto puede ser algo que los alumnos no tengan claramente identificado. Una actividad que puede servir para trabajar sobre este aspecto puede ser la siguiente:

"Ustedes han construido un triángulo con los tres datos dados. Ahora deben conservar el dato de l y de h, pero pueden variar el dato de m. ¿Pueden encontrar un valor para m de manera que el triángulo obtenido sea de área mayor que el que construyeron recién?"

La exploración de esta situación llevará necesariamente a poner en relieve la noción de área del triángulo y la imposibilidad de encontrar una mediana m para lograr un área mayor. Llegar a esta respuesta puede ser a su vez la apertura hacia nuevas preguntas:

¿Y si dejamos fijos l y m, variando h, se podrá encontrar un triángulo de área mayor?

La exploración de esta situación permite el planteo de la siguiente pregunta:

¿Cuál es el valor máximo de h posible y el área máxima que puede lograrse en función de los datos primitivos de l y m ?

La respuesta ahora lleva a considerar el caso de un triángulo isósceles, donde la medida de m y h coinciden y la mediana resulta perpendicular al lado l.

En definitiva, el trabajo que se plantea en torno a esta construcción puede ser considerado como un ejemplo que es posible pensar para muchos otros contenidos del programa, en especial de geometría: un juego de ida y vuelta entre exploraciones (con comprobaciones empíricas), conjeturas y validaciones apoyándose en propiedades conocidas.

EJEMPLO 22

Exploración de las propiedades de las bisectrices en un triángulo.

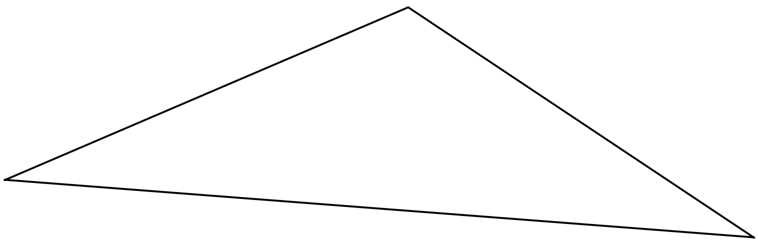
a) Discutir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- Todo punto de una bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.
- En un triángulo la bisectriz de uno de sus ángulos corta al lado opuesto en dos segmentos iguales.
- En un triángulo la bisectriz de uno de sus ángulos equidista de los otros dos vértices.

Como no se sabe en principio si cada enunciado es verdadero o falso, se hace necesario un primer momento de exploración que incluya algunos dibujos de casos particulares. Esta exploración permitirá hacer una conjetura acerca de su veracidad. Es una buena oportunidad para discutir en clase la diferencia entre justificar que una afirmación es verdadera y probar que un enunciado es falso.

A continuación de este trabajo de estudio de las propiedades de la bisectriz puede plantearse el siguiente problema:

b) Dado el siguiente triángulo



Dar instrucciones para dibujar allí adentro una circunferencia lo más grande posible. Se puede utilizar en el trazado transportador, regla y compás.

En este trazado se permite el transportador para el trazado de las bisectrices, separando el problema de esta construcción con regla y compás para otro momento de trabajo (anterior o posterior a este) como se menciona en los comentarios a esta unidad.

Las construcción que se pide se apoya entonces en la consideración de que un punto que pertenezca a tres bisectrices deberá equidistar de los tres lados y, por lo tanto, será el centro de una circunferencia tangente a los tres.

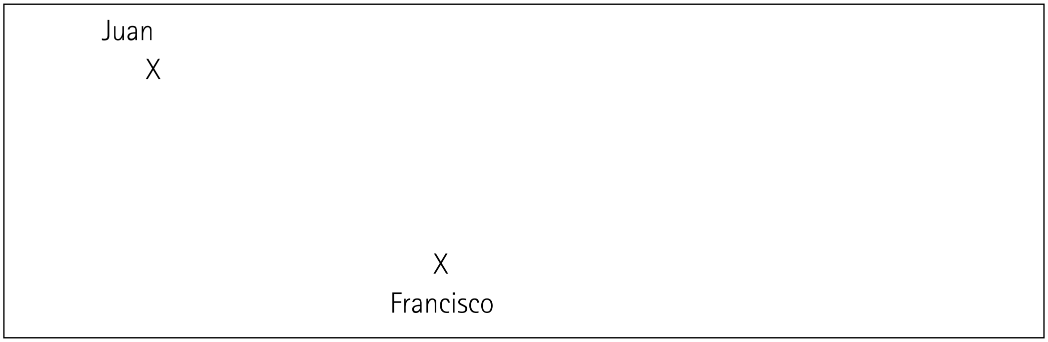
Pero arribar a esta conclusión puede requerir pasar por conocimientos intermedios: si se consideran como centros los puntos de una bisectriz, se pueden construir circunferencias tangentes a los dos lados correspondientes a ese ángulo. La noción de tangente estudiada en la Unidad 1 deberá ser reinvertida identificando el radio que pasa por el centro y es perpendicular al lado del triángulo.

La exploración realizada para una bisectriz permite arribar a la conclusión que para lograr una circunferencia que "toque" a los tres lados, deberá tener su centro en un punto que pertenezca a las tres bisectrices.

EJEMPLO 23

Exploración de la determinación de puntos que equidisten de dos fijos: la noción de mediatriz (este ejemplo se presenta como una recuperación de nociones que han sido trabajadas en primer año y su inclusión y/o profundización dependerán del trabajo efectivamente realizado por cada grupo de alumnos el año anterior).

Dos amigos, Juan y Francisco viven en un bosque, en una ubicación que se presenta en el siguiente mapa:



a) Un tercer amigo, Roberto, quiere ubicar su casa de manera que se encuentre a la misma distancia de Juan que de Francisco. Marcá en el mapa dónde podría construir Roberto su casa.

Como ya se dijo en los comentarios de la Unidad 2, esta actividad se plantea como exploratoria de la formulación y validación de conjeturas acerca de la determinación de todos los puntos que equidistan de dos fijos, y la definición de mediatriz de un segmento. Aunque algunos alumnos habrán estudiado el concepto de mediatriz en primer año (es parte de los contenidos), es posible que, de todos modos, muchos comiencen identificando un único punto que verifique esta propiedad: el punto medio entre las casas de los dos amigos. Habrá que remover esta idea para arribar a la consideración de toda la recta (en este caso solamente del segmento que cae dentro del mapa).

El trabajo sobre este problema servirá para revisar la definición de mediatriz y para la formulación y validación de su propiedad básica (ver los comentarios de la Unidad 2). A continuación puede retornarse al problema de los tres amigos y preguntar ahora:

b) ¿Podrá ser que Roberto construya su casa de manera que ahora los tres se encuentren a la misma distancia uno del otro? Si te parece que sí, marcá en el mapa el punto donde debería ubicar Roberto su casa.

Se trata ahora de identificar, entre todos los puntos de la mediatriz del segmento $\overline{JF}$, aquél (o aquéllos) cuya distancia a J (o a F) sea igual a la medida de $\overline{JF}$. El compás, con la posibilidad que brinda de transportar medidas y dibujar circunferencias, será ahora el instrumento (teórico y práctico) que permita finalizar la construcción: con centro en J (o en F), se dibuja la circunferencia que pase por el otro extremo del segmento, esa circunferencia corta a la mediatriz de $\overline{JF}$ en dos puntos, que responden ambos al problema que se había planteado.

Una vez ubicado el punto R (que corresponde a la casa de Roberto), en cualquiera de sus dos ubicaciones posibles, se puede identificar que el triángulo RJF que queda determinado es equilátero.

EJEMPLO 24

Como variante de las situaciones estudiadas en el ejemplo 20, y apuntando ahora a la determinación de una circunferencia que pase por tres puntos dados, puede plantearse la siguiente situación:

"Tres amigas están estudiando en diferentes lugares de una terraza. Quieren ubicar el equipo de música de manera que se encuentre exactamente a la misma distancia de las tres. Marca en el plano dónde deberían ubicar el aparato."

Flor
X

X Juli

X
Anita

Como siempre, no se trata solamente de la ubicación del punto pedido sino del enunciado de un procedimiento preciso para ubicarlo y de la justificación de que esa construcción va a dar la respuesta al problema.

Descontextualizando la situación se llega a la formulación del problema de la circunferencia circunscripta a un triángulo.

EJEMPLO 25

Exploración de las propiedades de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.

Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no:

- Cualquiera de las alturas de un triángulo, siempre es menor que dos de sus lados.
- Cualquiera de las medianas de un triángulo siempre es menor que dos de sus lados.
- La altura de un triángulo es menor que la mediana que corresponde al mismo lado.
- Si la mediana correspondiente a un lado de un triángulo es también mediatriz de dicho lado, el triángulo es isósceles.
- Si la altura correspondiente a un lado de un triángulo es bisectriz del ángulo opuesto, entonces el triángulo es isósceles.

En actividades como estas donde se estudia la verdad o falsedad de una afirmación resulta formativo detenerse en aquellas afirmaciones falsas estudiando su dominio de validez, o sea en este caso encontrar una familia particular de triángulos para la cual esta afirmación es verdadera.

EJEMPLO 26

Un posible tratamiento del teorema de Thales.

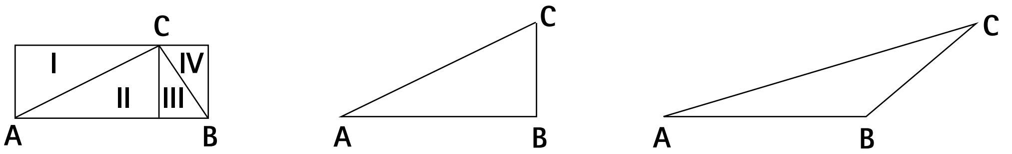
La demostración que se presenta se basa en la noción de área de un triángulo y sigue esencialmente el tratamiento de Euclides, en los Elementos.

Será necesario entonces recuperar con los alumnos que:

1. El área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo que tiene la misma base y la misma altura.

Es posible que no todos los alumnos tengan disponible esta relación. Una situación para arribar a ese conocimiento podrá ser:

2. Construir en cada caso un rectángulo cuya base es igual al lado $\overline{AB}$ y cuya altura es igual a la altura del triángulo correspondiente al lado $\overline{AB}$. Comparar el área del rectángulo con la de su correspondiente triángulo.



La idea es que los alumnos "partan" el rectángulo en dos partes "convenientes" para establecer la comparación. Por ejemplo para el primer caso, podrán analizar que las áreas I y II son iguales y que el área III es igual al área IV. De aquí surge que la suma de las áreas de II y III es igual a la mitad del área del rectángulo.

Otro conocimiento necesario, que se propone trabajar antes de hacer la demostración y que se deduce de las ideas anteriores es la siguiente relación:

3. *Si dos triángulos tienen alturas iguales, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases.*

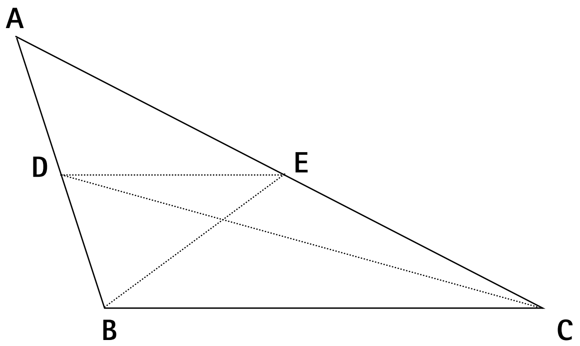
En el ejemplo 27 que sigue a continuación de éste se propone una actividad que puede resultar un punto de apoyo para trabajar sobre este conocimiento.

Se presenta ahora un esbozo de la demostración del teorema de Thales que se apoya en las propiedades 1 y 2 recién enunciadas. Es probable que sea el docente quien deba desarrollarla. La tarea de los alumnos será, en este caso, comprender dicho desarrollo. Comprender demostraciones hechas por otros, o propuestas en un texto, es parte de aquello que se espera que aprendan los alumnos.

Teorema de Thales

Se considera el triángulo ABC, y se traza $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$. Se probará que $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$.

Los triángulos BDE y CDE tienen igual área porque tienen la misma base $\overline{DE}$ y los vértices C y B sobre la misma paralela a la base, lo que significa que tienen igual altura.



Por otro lado, considerando los triángulos ADE y BDE y teniendo en cuenta la propiedad 3. verificada por los alumnos se puede afirmar:

$$\frac{\text{Área del } \widehat{ADE}}{\text{Área del } \widehat{BDE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Y del mismo modo considerando los triángulos ADE y CED se puede afirmar:

$$\frac{\text{Área del } \widehat{ADE}}{\text{Área del } \widehat{CDE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

Como el área del $\widehat{BDE}$ es igual al área del $\widehat{CDE}$, se puede concluir que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$, que es la relación que se había propuesto.

Hay varias consecuencias de esta última relación que deberán ser trabajadas:

- Si consideramos los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, se obtiene la relación

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

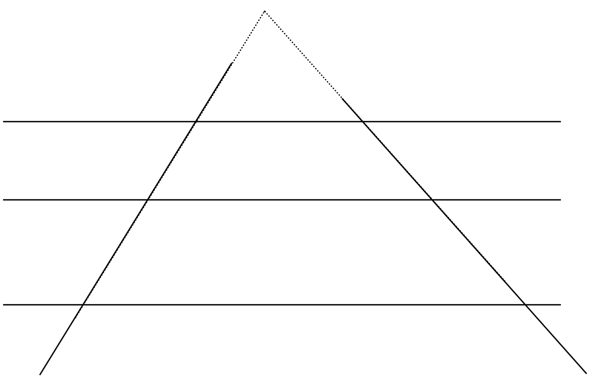
- La relación anterior puede también enunciarse diciendo que existe un número m (no necesariamente racional), de manera que

$\overline{AB} = m \, . \, \overline{AD}$ y $\overline{AC} = m \, . \, \overline{AE}$

- Los segmentos de "paralelas" también resultan proporcionales a los segmentos de "transversales". Es decir :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

- La relación que ha sido demostrada para triángulos se extiende a 3 rectas paralelas cortadas por transversales.

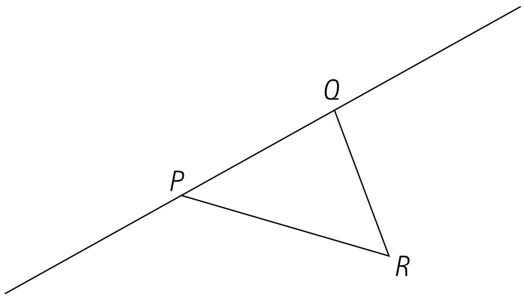


EJEMPLO 27

Actividades para trabajar la equivalencia de áreas

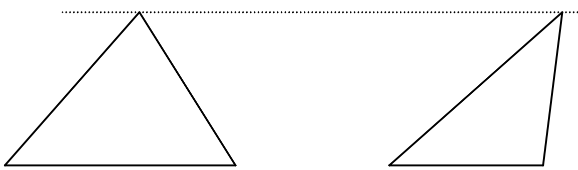
a) Dado el triángulo ABC, hallar P *perteneciente a la recta* $\overline{AB}$ *de manera tal que el área de* $\overset{\triangle}{PAC}$ *sea la mitad del área del* $\overset{\triangle}{ABC}$*.*

b) Se da un triángulo dibujado con una leyenda:



PRQ es un triángulo, hay que determinar un punto O que pertenezca a la recta $\overline{PQ}$*. De manera que el área del triángulo PQR sea* $\frac{4}{5}$ *del área del triángulo PRO. Se puede usar solamente regla no graduada y compás. Hay que construir el triángulo PRO y justificar la construcción.*

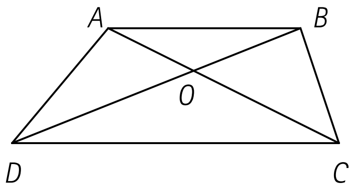
c) Probar la validez del siguiente enunciado:
"La razón de las áreas de dos triángulos de igual altura es igual a la razón de sus bases."



Un modo de probar esta afirmación es apelar a la fórmula del área del triángulo.
Esta es una demostración que, a diferencia de la del Teorema de Thales, está al alcance de los alumnos.

d) En un trapecio cualquiera ABCD con $\overline{AB} \, // \, \overline{CD}$*, trazar las diagonales* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$*. Se cortan en*

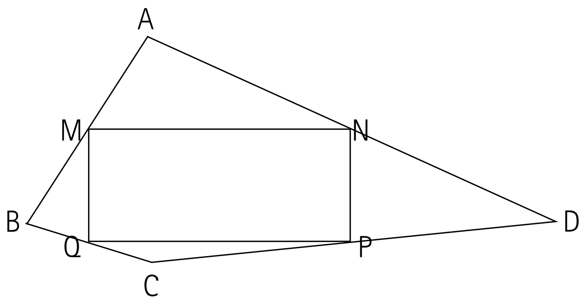
O. Comparar las áreas de los triángulos AOD y BOC. Proponer argumentos para validar la respuesta.



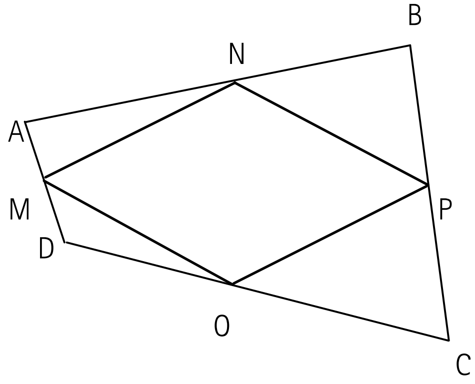
e) Dibujar un paralelogramo ABCD. Trazar los puntos medios de los lados y unirlos; se forma otro paralelogramo MNPQ. ¿Qué relación se da entre las áreas de esos dos paralelogramos? Justificar la respuesta.

EJEMPLO 28

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y sean M, N, P y Q los puntos medios de sus lados. ¿Qué clase de cuadrilátero es MNQP ?
Si se realiza el siguiente dibujo para representar el problema



"se ve" que MNQP es un rectángulo. En cambio si el dibujo para representar la situación fuera este:



se "mostraría" que el cuadrilátero en cuestión es un rombo.

En realidad, si se hace un análisis geométrico a partir de considerar las diagonales del cuadrilátero obtenido y la propiedad de las bases medias de un triángulo, se llega a la conclusión de que MNQP es siempre un paralelogramo y que, bajo ciertas condiciones particulares, ese paralelogramo puede ser cuadrado, rectángulo o rombo.

EJEMPLO 29

Discutir bajo qué condiciones se puede asegurar la semejanza de ciertas figuras:

¿Todos los cuadrados son semejantes?
¿Todos los rectángulos son semejantes?
¿Todos los rombos son semejantes?
¿Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes?
¿Todos los triángulos rectángulos son semejantes?
¿Todos los triángulos isósceles son semejantes?

Para argumentar se hace necesario poner en juego la relación entre las áreas de polígonos semejantes y los lados.

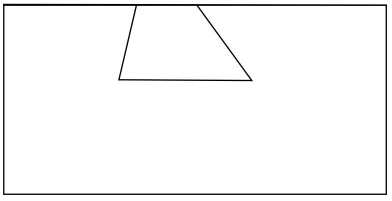
EJEMPLO 30

- ¿Es verdad que si a cada uno de los lados de un cuadrilátero se suman 2 cm se obtiene un cuadrilátero semejante al original?

- Si el área de un triángulo equilátero es el cuádruplo del área de otro triángulo de 12 cm de lado, ¿cuál es la longitud del lado del triángulo grande?

EJEMPLO 31

En una hoja de papel está dibujada una parte de un triángulo como muestra la figura.



El problema consiste en hallar el perímetro del triángulo sin salirse de la hoja de papel.

El teorema de Thales es la herramienta adecuada para la solución de este problema.

EJEMPLO 32

En un trapecio isósceles se conocen la base mayor, la base menor y la altura. A una cierta altura se traza una paralela a las bases y se sombrea la parte del trapecio limitada por la base menor y esta paralela. ¿A qué altura habrá que trazar la paralela para que el área sombreada sea $\frac{3}{4}$ *del área del trapecio?*