La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas

B. Charlot, conferencia dictada en Cannes, marzo 1986.

¿Qué es hacer matemáticas? Para cualquiera que enseña cotidianamente matemáticas, esta pregunta puede parecer un exceso, o incluso un juego casi gratuito y sin gran interés. Dicho de otro modo, muchos profesores de matemáticas consideran esta pregunta como un asunto de la filosofía con el que es mejor no meterse. Hace veinte años que las reformas en la enseñanza de las matemáticas se han sucedido a un ritmo tal, que muchos profesores ya no saben qué se espera de ellos y llegan a preguntarse: ¿qué es enseñar matemáticas? Y finalmente ¿qué son las matemáticas? Quisiera proponer a este respecto algunas pistas y señalar la importancia de comprender la epistemología – teoría del conocimiento, de su objeto y de sus métodos –implícita, propia a toda práctica de la enseñanza de la matemática.

¿Qué es estudiar matemáticas? Mi respuesta global será que estudiar matemáticas es efectivamente HACERLAS, en el sentido propio del término, construirlas, fabricarlas, producirlas, ya sea en la historia del pensamiento humano o en el aprendizaje individual. No se trata de hacer que los alumnos reinventen las matemáticas que ya existen sino de comprometerlos en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos.

Esta idea que sostiene que estudiar matemáticas es HACER matemáticas no es la más predominante en el universo escolar actual. La idea más corriente es aquélla que postula que las matemáticas no tienen que ser producidas sino descubiertas. Es decir, que los entes matemáticos ya existen en alguna parte, en el cielo de las Ideas. A partir de allí, el papel del matemático no es el de crear o inventar dichos entes sino el de develar las verdades matemáticas existentes pero aún desconocidas. Desde esta misma concepción, las verdades matemáticas sólo pueden ser enunciadas gracias a la labor de los matemáticos, pero ellas son lo que son, dadas desde siempre, independientemente de la labor de los matemáticos. La enseñanza clásica de las matemáticas se basa en una epistemología y una ontología platónica que las matemáticas modernas aún mantienen: las Ideas matemáticas tienen una realidad propia.

El matemático René Thom no vacila en afirmar explícitamente que "la hipótesis de ideas platónicas que informan el universo es, a pesar de las apariencias, la más natural y, filosóficamente la más económica". Una vez develada, la verdad matemática es expuesta a la mirada de quien sabe mirar suficientemente alto en el cielo de las Ideas. El papel del profesor consiste entonces en hacer que al alumno comparta esa visión a la que él ya accedió, y tornear el espíritu del alumno – "el ojo del alma", decía Platón – hacia el mundo matemático. Desde esta concepción, la verdad matemática le es dada a aquél que sabe ver, a aquél que tiene suficiente poder de abstracción.

El vocabulario pedagógico cotidiano, que sigue siendo muy platónico, contiene constantemente esta metáfora de la mirada, de la visión, de la luz. Como dicen los alumnos, "yo veo" o "yo no veo", "me da justo" o "no me da justo", y en materia de matemáticas, no hay discusión, ni duda, o se da en el blanco o se está fuera de foco. El vocabulario de los profesores, aunque es más rico, abunda en frases del mismo tipo. Ciertos alumnos son unas lumbreras, son brillantes, son unas luces, sacan las cosas a primera vista. Otros, lamentablemente, tienen orejeras, son ciegos, para ellos todo es oscuro. Existen, en suma, los alumnos de cien watts y alumnos de cuarenta watts, y nada tiene que ver el profesor en esto que no ha hecho más que dar su curso lo más “claramente” posible.

Sobre esta metáfora de la mirada se inscriben dos discursos interpretativos. Por un lado, la interpretación biológica que hoy se adorna de argumentos con pretensiones genéticas, pero retoma de hecho el discurso sobre la inteligencia que tenía Platón hace veinticinco siglos: las matemáticas están dadas a quienes tienen un don, una capacidad de abstracción suficiente para percibir los contenidos conceptuales que les son propuestos – lo que la frenología llamaba hace casi un siglo y medio "la joroba de los matemáticos"–. La segunda interpretación propuesta por la sociología de la educación explica que algunos niños padecen de discapacidades socio-culturales, que carecen del *capital* cultural necesario para manejar un lenguaje abstracto y acceder así al universo matemático.

Estas dos tesis, una bio-genética y la otra socio-cultural, son muy diferentes pero parten de un postulado común: los conceptos, los conocimientos, las culturas están considerados como *dados* y se transmiten a los herederos bajo la forma de don natural o capital socio-cultural.

A esta idea de una matemática dada, bajo una u otra forma, contrapongo la idea de una matemática construida, diría incluso, utilizando de una manera un poco provocativa el vocabulario de la técnica, una matemática fabricada. La actividad matemática no es mirar y descubrir, es crear, producir, fabricar. Los conceptos matemáticos no son un bien cultural trasmitido hereditariamente como un don o socialmente como un capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento, el trabajo de los matemáticos a través de la historia, el del niño a través de su aprendizaje.

El Don y el Capital de un lado, el Trabajo del otro: empleo estos términos intencionalmente para que se pueda comprender mejor cuál es el problema de fondo planteado por la democratización de la enseñanza de la matemática. Esta democratización implica una ruptura que no recurre al ámbito de las aptitudes naturales o del entorno socio-cultural en un sentido vago del término, sino que es una ruptura social en el seno de las prácticas mismas de enseñanza. Hacer matemática no consiste en una actividad que permita a un pequeño grupo de elegidos por la naturaleza o por la cultura, el acceso a un mundo muy particular por su abstracción. Hacer matemáticas es un trabajo del pensamiento que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran sin cesar. Democratizar la enseñanza de la matemática supone en principio que se rompa con unaconcepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y que sólo sería accesible a algunos, y que se piense en cambio la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos mediante el respeto de ciertas reglas. Son dichas reglas, es decir las técnicas pedagógicas, las que permiten al alumno conducir el trabajo de su pensamiento matemático y las que yo querría ahora explicitar brevemente.

Verdad y actividad matemática

En primer lugar, examinemos las consecuencias pedagógicas de la epistemología y de la ontología que subyacen al aprendizaje tradicional de las matemáticas. El matemático es quien devela las verdades y la enseñanza debe orientar el ojo del alma del alumno hacia esas verdades. Consecuentemente, lo que el docente toma de la actividad del matemático no es la actividad en sí misma, que muy a menudo ignora o que en todo caso silencia, sino los resultados de esta actividad: teoremas, demostraciones, definiciones, axiomas. Es así que el docente es conducido a sobrestimar la forma en que estos resultados son presentados. Si consideramos la actividad del matemático, esta sobrestimación de la forma resulta paradojal, ya que no es la forma la que da sentido a los resultados, porque la forma sólo se determina a posteriori, cuando se llega a los resultados por otras vías mucho más accidentadas: ningún matemático inventó jamás nada con una demostración rigurosa respetando las reglas canónicas.

Pero esta paradoja se explica si se tiene en cuenta que el objetivo es presentar al alumno la Verdad matemática en toda su pureza y su esplendor: el docente saca el diamante de su estuche y presenta el ente matemático en la impecable definición que debe permitir al alumno aprehenderlo en su mayor esplendor. A partir de allí, el rigor se transforma en la verdad matemática esencial, y particularmente el rigor del lenguaje porque cuando se deja de lado la actividad matemática, el lenguaje es el único soporte del concepto matemático. Es así que el docente exige inmediatamente del alumno, en los primeros pasos, este rigor en el pensamiento y en el lenguaje, olvidando que el propio matemático consigue ese rigor recién hacia el final de un largo proceso de aproximaciones y rectificaciones. El saber matemático aparece entonces para el alumno, no como un sistema de conceptos que permiten resolver problemas sino como un gran discurso codificado, normalizado, simbólico, "abstracto".

Esta separación entre la actividad matemática y sus resultados, entre los problemas y los conceptos, engendra un fracaso escolar importante, sobre todo entre los niños de familias humildes, que no están familiarizados con ese lenguaje explícito, formalizado, codificado. Explican este fracaso, diciendo que las matemáticas son difíciles porque son abstractas y resuelven que a los alumnos con dificultades escolares hay que enseñarles las matemáticas partiendo de lo concreto.

En resumen, para aquéllos que no tienen, o que no tienen todavía, suficiente poder de abstracción, haría falta construir un andamiaje particular que les permitiera alcanzar poco a poco el mundo matemático. A tal efecto, se elaboran materiales, situaciones, estrategias que, en el análisis, se muestran como seudo-concretas: bloques lógicos en el jardín de infantes, relaciones familiares a representar por los diagramas en la primaria, estudio de boletas de pago más adelante, etc. Y es así que las dificultades son cada vez mayores.

Existe una confusión entre la pedagogía activa y la pedagogía concreta que provoca bastante daño en la enseñanza. Se confunde la actividad intelectual del alumno con la actividad física del alumno sobre material manipulable o la actividad del alumno a partir de situaciones familiares. Lo importante es la actividad *intelectual* del alumno, cuyas características, tal como Piaget las ha descripto, son parecidas a aquéllas que los historiadores de las matemáticas encuentran en el matemático creador: el pensamiento parte de un problema, plantea hipótesis, realiza rectificaciones, transferencias, generalizaciones, rupturas, etc..., para construir poco a poco los conceptos y, a través de esta construcción de conceptos, para edificar sus propias estructuras intelectuales. Para un niño, esta actividad intelectual supone un soporte manipulable (hasta alrededor de los 7 años), más tarde, al menos representable (como mínimo hasta los 12 años). Pero lo verdaderamente importante aquí es la actividad intelectual sobre este soporte y no el carácter "concreto" del mismo. Por otro lado, incluso cuando el niño ya puede prescindir de ese soporte para el aprendizaje y abordar directamente las relaciones por sí mismas, no hay otra vía posible que la actividad intelectual.

En síntesis, si el aprendizaje de las matemáticas es actualmente difícil, no es porque las matemáticas son abstractas, sino porque este aprendizaje no está basado en la actividad intelectual del alumno sino en la memorización y aplicación de saberes de los que el alumno no ha comprendido realmente el sentido. La solución a las dificultades actuales de los profesores y de los alumnos no está en buscar del lado de la dupla abstracto/concreto, que no es más que una coartada ideológica en la selección, sino del lado de un aprendizaje de las matemáticas fundado en la actividad intelectual de aquél que aprende. De acuerdo, se dirá, pero en la práctica pedagógica cotidiana, ¿qué significa esto?

Definición y problemas

En principio, que el rigor del pensamiento y la precisión en el vocabulario no son, no deben ser, exigidos al alumno al comienzo del aprendizaje.

En verdad, el rigor del pensamiento y del lenguaje sigue siendo uno de los objetivos esenciales del aprendizaje de las matemáticas. Pero precisamente, se trata de un objetivo y no de la base o el punto de partida de la pedagogía de las matemáticas. El alumno debe aprender a ser riguroso, pero sólo puede llegar a serlo si su actividad le muestra la necesidad. El profesor debe ayudar al alumno a percibir y a integrar la necesidad del rigor, tanto como debe ayudarlo a construir los conceptos matemáticos. Esta ayuda no consiste en un discurso moralizador, ni en críticas repetidas o en una represión meticulosa de la más pequeña desviación fuera de las normas, se trata más bien de una profundización de la actividad matemática del alumno. El rigor no debe ser una exigencia impuesta del exterior por el maestro – y en consecuencia sentida por el alumno como arbitraria – sino una necesidad para aquél que quiere comunicar los resultados de su actividad, defenderlos contra las dudas, utilizarlos para resolver nuevos problemas. El rigor, tanto como el saber, se construye a partir de la actividad matemática. Más aún, que ninguna exigencia prematura de rigor esterilice toda la actividad del alumno.

Esto quiere decir esencialmente que una enseñanza matemática no debe comenzar nunca por definiciones, en todo caso por definiciones expuestas en las reglas de la actividad. En el mejor de los casos, tal enseñanza es inútil: si el alumno comprende la definición, que condensa las propiedades fundamentales del objeto matemático que será el problema, es porque ya conoce lo esencial. En el peor de los casos – que es lo más frecuente – un curso que comienza por la definición provoca el rechazo escolar. El alumno, falto de una actividad previa, no comprende esta definición, pero al menos es advertido desde el comienzo que no comprende nada de aquello de lo que se va a hablar, y que ni vale la pena probar. Sólo aquéllos que adquirieron anteriormente una sólida confianza en sus capacidades matemáticas se interesan verdaderamente, y al término del proceso "curso - ejercicios de aplicación" terminan por comprender esta definición que les había descerrajado de golpe.

El punto de partida de la actividad matemática no es la definición sino el problema. Si ciertos alumnos, a pesar de todo, aprenden matemática con la estrategia pedagógica actual, es ante todo en los momentos donde ellos resuelven los problemas y, para resolverlos, deben construir un saber matemático apoyándose en las migajas que han asimilado de los cursos y de algunos párrafos del manual que pudieron comprender solos. Desgraciadamente, aprenden al margen de la estrategia pedagógica oficial, por sí mismos, mientras que el profesor no está allí para ayudarlos a sobrepasar los obstáculos y profundizar su pensamiento. ¿Cómo asombrarse entonces de que tengan éxito sobre todo aquéllos que encuentran en su medio familiar un sustituto del maestro? ¿El problema puede ser propuesto por el maestro, o es esto un ataque intolerable a los derechos del niño? En realidad poco importa para qué se plantea el problema, y sobre todo si no logra interesar al alumno, en el callejón sin salida de la discusión directividad/no directividad. Lo esencial no es saber qué propone el problema, sino si tiene sentido para el alumno, si le permite desarrollar una actividad intelectual y construir los saberes matemáticos. El curso magistral precediendo el momento de la investigación activa del alumno no me parece que constituya un método pertinente de enseñanza de la matemática. Será mucho más eficaz si el maestro, en lugar de presentar los contenidos matemáticos, parte de problemas e introduce los conceptos como instrumentos para resolver estos problemas.

Falta ponernos de acuerdo acerca de la noción de problema. El problema que puede servir como punto de partida de la actividad intelectual del alumno no es ciertamente un ejercicio donde aplique en forma casi mecánica una fórmula o un proceso operatorio. Un ejercicio de esas características constituye una tarea fuertemente rutinaria y no es seguramente para el alumno, un problema. No hay un problema en el sentido estricto del término, si el alumno no está obligado a trabajar el enunciado de la pregunta que se le hace y estructurar la situación que se le propone. El hecho de que los alumnos respondan a preguntas absurdas como la edad del capitán o que se angustien al contestar una pregunta sin utilizar uno de los datos numéricos se debe a que sólo excepcionalmente se los confronta con tales problemas. Pensar no es solamente encontrar una respuesta a una pregunta bien planteada, es también formular la pregunta pertinente cuando uno se encuentra frente a una situación problemática. La actividad matemática no es simplemente buscar la respuesta correcta. Es también la elaboración de hipótesis, de conjeturas que son confrontadas con otras y testeadas en la resolución del problema. Un concepto aproximado es forjado para resolver un cierto tipo de problemas. Después el pensamiento rebota cuando el alumno utiliza este concepto para resolver otros problemas, lo que lo obliga a hacer transferencias, rectificaciones, rupturas, etc., según un proceso análogo a aquél que se puede observar en la historia de la matemática.

Me parece esencial comprender que el alumno no construye un concepto en respuesta a un problema, sino, según la excelente fórmula de los investigadores Louvain-la-Neuve, un campo de conceptos toma sentido en un campo de problemas. Un concepto matemático se construye articulado con otros conceptos, a través de una serie de rectificaciones y de generalizaciones que se hacen necesarias para su utilización en un campo de problemas de la misma familia.

Me parece esencial comprender que el concepto matemático existe bajo diversos estatutos, que corresponden a diversos momentos de la actividad matemática. Tomo aquí una excelente fórmula de G. Brousseau: acción, formulación, validación, institucionalización. Mientras un alumno es capaz de decir si una regla matemática se aplica en diversos ejemplos y contraejemplos sin poder formular claramente esta regla ni explicitar su respuesta, no comprendió nada. Es capaz de utilizar el concepto como instrumento de acción, sin poder todavía formularlo y tratar de validarlo. La segunda etapa, la formulación, viene enseguida si al menos el docente logra colocar al alumno en una situación donde esta formulación se hace necesaria. Esta formulación se presenta en diversos grados: regla exagerada presentada con una algarabía poco rigurosa, regla justa pero correspondiente a algunos casos particulares, regla general. El alumno deberá pasar de un nivel de formulación a otro cuando deba validar esa regla, comunicarla a otros, y defenderla de otras formulaciones. Finalmente, viene la institucionalización que trae el docente: aquí se enuncia la regla tal como se utiliza en la comunidad matemática. Como se ve, no se sacrifica ni el rigor, ni se excluye la palabra "oficial" del maestro. Pero el rigor se construye progresivamente, como exigencia interna de la actividad matemática misma, y la exposición magistral viene a coronar la búsqueda de los alumnos, como momento de puesta en orden, de estructuración, de síntesis.

Esta descripción de la actividad matemática introduce dos ideas, que circulan como las seudo-evidencias para quienes discuten la pedagogía dominante de las matemáticas: el juego y la utilidad.

Juegos matemáticos y matemáticas útiles

Si por juego se designa una actividad donde el alumno realiza con placer – que no excluye el esfuerzo, sino que lo sostiene –, una actividad que permite un funcionamiento del pensamiento no condicionado por reglas exteriores vividas por el alumno como artificiales y arbitrarias, no tengo ninguna objeción. Además, el alumno tiene derecho a que su actividad sea socialmente reconocida como un trabajo serio y no como un juego, y se engañe a ciertos alumnos con la idea de que en la escuela juegan en vez de trabajar!

Pero si por juego matemático se designa una actividad puntual, no articulada alrededor de un campo de problemas, no anclada en el programa, sin proyecto intelectual ni institucional, ya no estoy de acuerdo. Estos momentos de aventura matemática no son para excluir, pero no pueden constituir la base de un aprendizaje de las matemáticas. Éste supone la articulación entre situaciones que, al menos para el maestro, sean ricas en progresión futura. El alumno debe sentir que progresa y el docente, por su lado, no puede librarse de toda dependencia con los programas.

La idea de proponer matemáticas "útiles" a los alumnos en situación de rechazo escolar se complementa con la idea de juego matemático. Hablar de juego es centrar el aprendizaje en la actividad misma, considerando finalmente insignificante el resultado de esta actividad. Hablar de utilidad es ocultar nuevamente la actividad matemática insistiendo ahora, en cambio, en el valor del resultado, pero en el ámbito de la vida cotidiana y no más en un universo matemático abstracto. Es interesante constatar que quienes enseñan matemáticas a los alumnos que a priori son desconfiados oscilan a menudo entre la estrategia del juego y la de la utilidad. Estas estrategias, en un cierto sentido inversas, desarticulan ambas la actividad matemática en *actividad* que conduce a *resultados*. Esta actividad no puede definirse como juego porque su sentido es generar resultados y no satisfacerse a sí misma. Estos resultados tampoco pueden definirse por su utilidad en la vida cotidiana porque los mismos toman su sentido de la actividad que los creó. Estas dos estrategias se resignan finalmente a un vínculo negativo de los alumnos con el trabajo matemático, que las mismas intentan evitar con la idea de juego o utilidad en lugar de reconstruir este vínculo haciendo vivir la actividad matemática como trabajo creador. En el fondo, estas estrategias ratifican, cada una a su manera, la inaptitud de ciertos alumnos para hacer matemática. La una porque hace matemáticas pero no plantea lo que hace como algo serio, la otra porque intenta proveer a sus alumnos de herramientas matemáticas pero les hace creer que no es esencial que esas herramientas hayan sido construidas por ellos mismos.

Efectivamente es muy difícil enseñar matemáticas "útiles". Pasemos rápidamente al carácter, a menudo artificial, de esta utilidad proclamada. Lo esencial no esta ahí, si no en una contradicción de fondo. Apuntar a lo útil es apuntar al resultado y lo que interesa al alumno, en este caso es tener la solución que el maestro bien podría, y de manera más sencilla, darle directamente. Pero, a pesar de todo, lo que interesa al docente es el camino para llegar a este resultado más que el resultado en sí mismo.

Ahora bien, cuanto más se insiste en la utilidad de las matemáticas, más la urgencia por encontrar la solución oculta al alumno el interés de hacerlo por si mismo. En verdad, el argumento de la utilidad puede acercar al alumno, motivarlo en la medida en que se garantice que el problema planteado por el maestro es un verdadero problema, un problema que tiene un sentido, y no un ejercicio escolar que no significa más nada afuera de la escuela. Pero es bueno comprender que, pedagógicamente, lo interesante en un problema útil no es que sea útil, sino que sea un verdadero problema, con un sentido para el alumno.

Hay, en mi opinión, una motivación más importante que la utilidad: el desafío que le plantea al alumno el problema en tanto que es un problema. Lo importante para el alumno no es conocer la solución, es ser capaz de encontrarla por sí mismo y de construir así, a través de su actividad matemática, una imagen positiva de sí mismo, valorizante frente a las matemáticas. La recompensa al problema resuelto no es la solución del problema, es su éxito personal al resolverlo por sus propios medios, es la imagen que puede tener de sí mismo como alguien capaz de resolver problemas, de hacer matemáticas, de aprender.

La imagen de si mismo frente a las matemáticas es, en un sentido más amplio, su imagen frente al saber escolar y a la escuela, frente al mundo adulto y al porvenir: se trata de una postura sumamente seria que no debe tratarse hablando de un juego o de una rentabilidad inmediata de las matemáticas. Esta postura es muy profundamente psicológica y cultural, porque ¿qué es la cultura, sino la capacidad de situarse como autónomo, activo y creador en el mundo circundante? Esta postura es también social y política. Frente a las estadísticas, a las encuestas, a los índices, a la utilización cada vez más frecuente del argumento matemático en el discurso social y político, no es poco importante que los alumnos consideren a las matemáticas como un universo muy particular, accesible a pocos, o como una actividad que produce resultados según ciertas reglas verificables por todos.

¿Educación Cívica a partir de las matemáticas? Desde luego, desde el momento que el aprendizaje de las matemáticas se basa en una epistemología implícita que define al hombre frente al saber, a la cultura, a la historia, y frente a los otros hombres.

Este texto es una traducción realizada con el objeto de ser trabajada en instancias de discusión colectiva con docentes de la Ciudad de Buenos Aires. Constituye un capítulo del libro *Faire des Mathématiques: le plaisir du sens*, cuyos autores son R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche.

Según se anuncia en el referido libro, el capítulo fue tomado de una conferencia pronunciada por B.Charlot en Cannes, en marzo de 1986).